

VŠB – Technická univerzita Ostrava  
Fakulta elektrotechniky a informatiky  
Katedra aplikované matematiky

# **Metody hraničních prvků vyšších řádů**

## **Higher-order boundary element methods**

# Zadání diplomové práce

Student:

**Bc. David Ulčák**

Studijní program:

N2647 Informační a komunikační technologie

Studijní obor:

1103T031 Výpočetní matematika

Téma:

Metody hraničních prvků vyšších řádů  
Higher-order boundary element methods

Jazyk vypracování:

Zásady pro vypracování:

Nové trendy v architektuře počítačů přinášejí změnu pohledu na efektivitu numerických metod pro řešení úloh založených na parciálních diferenciálních rovnicích. Efektivní kódy by měly využívat vektorizace a paralelizace na úrovni jednoho procesoru a měly by omezit přístupy do hlavní paměti počítače. Z tohoto pohledu je v numerické matematice výhodnější použití plných matic oproti řídkým. Plné matice jsou charakteristické pro metodu hraničních prvků. Abychom zároveň dosáhli co nejpřesnější aproximace řešení, je vhodné na hladkých částech výpočetní oblasti obohatit bázové funkce polynomy vyšších stupňů, což vede na vyšší řád aproximace. Tato práce se bude zabývat teorií aproximace pro metodu hraničních prvků vyšších řádů a metodami efektivní numerické integrace pro výpočet prvků matice.

Seznam doporučené odborné literatury:

Formální náležitosti a rozsah diplomové práce stanoví pokyny pro vypracování zveřejněné na webových stránkách fakulty.

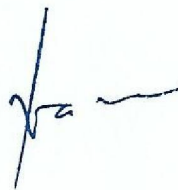
Vedoucí diplomové práce: **doc. Ing. Dalibor Lukáš, Ph.D.**

Datum zadání: 01.09.2017

Datum odevzdání: 30.04.2018



doc. RNDr. Jiří Bouchala, Ph.D.  
vedoucí katedry



prof. Ing. Pavel Brandštetter, CSc.  
děkan fakulty

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval samostatně. Uvedl jsem všechny literární prameny a publikace, ze kterých jsem čerpal.

V Ostravě 30. dubna 2018

  
.....

Rád bych na tomto místě poděkoval především vedoucímu této práce, doc. Ing Daliboru Lukášovi, Ph.D., za cenné rady, přínosné konzultace v přátelském duchu a trpělivost při psaní práce. Všem svým blízkým pak děkuji za neutuchající podporu, a také i jim za notnou dávku trpělivosti.

## Abstrakt

Tato diplomová práce se zabývá variantou metody hraničních prvků (BEM), využívající nejen po částech konstantní, ale po částech polynomiální bázové funkce. Text začíná stručným úvodem a nejpodstatnějšími základními pojmy. Třetí část je věnována Gaussovým kvadraturám a jejich speciální variantě, Gauss-log kvadratuře. Následně je diskutována hraniční integrální formulace okrajové úlohy pro Laplaceovu rovnici ve 2D, a její numerické řešení pomocí BEM. V poslední kapitole je pak diskutována  $p$ -BEM a provedeno její srovnání s klasickou BEM.

**Klíčová slova:** BEM, polynomiální Galerkinovská báze, Laplaceova rovnice, numerická integrace, Legendreovy polynomy

## Abstract

In this master thesis we will be concerned with a variant of boundary element method (BEM), which is using not only piecewise constant basis functions, but also piecewise polynomial ones. The text begins with a brief introduction and some fundamental terms. The third section is dedicated to Gaussian quadratures and their special variant, Gauss-log quadrature. Then, boundary integral formulation of boundary value problem for Laplace equation in 2D is discussed, including its numerical solution via BEM. In the last section,  $p$ -BEM is discussed and its comparison with classical BEM is provided.

**Key Words:** BEM, polynomial Galerkin basis, Laplace equation, numerical integration, Legendre polynomials

# Obsah

Seznam použitých zkratek a symbolů	7
Seznam obrázků	8
1 Úvod	9
2 Základní pojmy	11
3 Gaussovy kvadratury	16
3.1 Ortogonální polynomy . . . . .	16
3.2 Obecná Gaussova kvadratura . . . . .	18
3.3 Gauss-log kvadratura . . . . .	20
4 Metoda hraničních prvků	24
4.1 Hraniční integrální formulace . . . . .	24
4.2 Numerická realizace . . . . .	30
4.3 Konvergence BEM . . . . .	38
5 Hraniční prvky vyšších řádů	41
5.1 Konstrukce matic . . . . .	41
5.1.1 Použité báze a struktura matic . . . . .	41
5.1.2 Identické segmenty matice $\mathbb{V}$ . . . . .	43
5.1.3 Sousední a disjunktní segmenty matice $\mathbb{V}$ . . . . .	45
5.1.4 Matice $\mathbb{K}$ a $\mathbb{M}$ . . . . .	46
5.2 Konvergence $p$ -BEM . . . . .	47
6 Závěr	50
Literatura	51
Přílohy	52
A Základní kód $p$ -BEM	52
B Ostatní přílohy na CD	55

## Seznam použitých zkratek a symbolů

BEM	– metoda hraničních prvků (Boundary Element Method)
$\cup$	– sjednocení
$\cap$	– průnik
$\overline{A}$	– uzávěr množiny $A$
$\nabla$	– Nabla operátor
$\Delta$	– Laplaceův operátor
$X^*$	– Duální prostor k prostoru $X$
$\lambda(\Omega)$	– Lebesgueova míra množiny $\Omega$
s.v.	– skoro všude/skoro všechna (tj. neplatící pouze na podmnožinách nulové míry)
$\mathcal{U}(x, \epsilon)$	– $\epsilon$ -okolí bodu $x$
$\mathbb{N}$	– množina přirozených čísel
$\mathbb{R}$	– množina reálných čísel
$\mathbb{R}^+$	– množina kladných reálných čísel
$\ \cdot\ _X$	– norma v prostoru $X$
$ \cdot _X$	– seminorma v prostoru $X$
$(\cdot, \cdot)_X$	– skalární součin v prostoru $X$
$C(\Omega)$	– Prostor spojitých funkcí na množině $\Omega$
$C^k(\Omega)$	– Prostor $k$ -krát spojitě diferencovatelných funkcí na množině $\Omega$
$\text{supp } \varphi$	– Nosič funkce $\varphi$

## Seznam obrázků

1	Příklady oblastí, které nemají lipschitzovskou hranici . . . . .	13
2	Příklad aproximace oblasti $\Omega$ polygonem a diskretizace hranice ve 2D . . . . .	31
3	Ilustrace bazových funkcí $\varphi$ . . . . .	32
4	Duffyho substitute . . . . .	35
5	Znázornění situace v matici $\mathbb{K}$ pro identické segmenty . . . . .	37
6	Hierarchická báze $\varphi_0^{(i)}, \dots, \varphi_9^{(i)}$ . . . . .	42
7	Ilustrace použité substitute . . . . .	44
8	Ukázka projekce řešení na báze různých řádů . . . . .	48
9	Srovnání $L^2(\Gamma)$ normy chyby $h$ -BEM a $p$ -BEM vzhledem k dimenzi produkova- ných soustav . . . . .	49
10	Číslo podmíněnosti matice $\mathbb{V}$ pro úlohu o 4 segmentech . . . . .	50



# 1 Úvod

Jednou ze stěžejních oblastí matematiky je matematické modelování. Tato oblast poznání se opírá především o diferenciální rovnice, jež poskytují nástroj k aproximaci rozsáhlé škály praktických problémů, ať už z oblasti pružnosti, proudění, akustiky, elektromagnetismu, či dokonce predikce poruch nebo sestavování ekonomických a populačních modelů.

Zdaleka ne vždy je však v prostých lidských silách možné řešení příslušných diferenciálních rovnic určit analyticky, ať už proto, že je řešení extrémně náročné, nebo dokonce není známé. V tu chvíli nastupují na scénu numerické řešiče, které poskytují prostředky k počítačovému nalezení řešení. Toto sice v drtivé většině případů nebývá přesné, nicméně teorie, sdružená s konkrétními metodami dává návod, jak tyto metody realizovat, abychom efektivně získali řešení o přesnosti, adekvátně vysoké pro praktické úlohy.

Pravděpodobně nejrozšířenější numerickou metodou pro okrajové úlohy na parciální diferenciální rovnice je metoda konečných prvků (FEM<sup>1</sup>), která zadaný problém vhodně převádí na soustavu lineárních rovnic. Za jeden z jejích kladů bývá považován fakt, že produkuje řídké matice.

Moderní architektury procesorů však umožňují rychlé řešení soustav s hustými maticemi pomocí tzv. vektorizace. Nabízí se otázka: Lze tohoto využít, abychom v jistém smyslu předčili metodu konečných prvků?

Alternativou k FEM je metoda hraničních prvků (BEM). Tato stojí na výrazně obtížnějším teoretickém aparátu, nežli FEM, snad proto je mezi inženýry o něco méně oblíbená. Na druhou stranu, její síla spočívá v tom, že na rozdíl od FEM, která oblast na níž je úloha řešena, diskretizuje v celém objemu, BEM k řešení úlohy potřebuje pouze okrajová (Cauchyho) data. A jelikož velikost výsledných lineárních soustav odpovídá počtu prvků dělení oblasti, BEM se ukazuje výrazně vhodnější pro úlohy, kde je poměr „povrch/objem“ dostatečně nízký<sup>2</sup>, neboť snižuje dimenzi problému o jedničku a výsledné soustavy tak mívají výrazně menší rozměry. Další výhodou BEM je její užitečnost při tvarové optimalizaci (viz [1]).

Přesto, do jisté míry snad právě i na popud popularity FEM, významná část softwarových balíků je implementována za užití speciálních algoritmů, efektivně pracujících právě s řídkými maticemi. Pro BEM je charakteristická produkce hustých matic. Tomuto zdánlivému úskalí se v praxi často čelí jejich tzv. „sparsifikací“. Jedná se o metody, jež husté matice, vycházející z BEM, převádí na řídké, a vzniklé soustavy posléze lze řešit za užití oblíbených knihoven. Nejčastěji se tohoto efektu dosahuje pomocí tzv. hierarchických matic, pro podrobnosti viz například [2].

Tímto procesem získává BEM lepší asymptotické vlastnosti, než FEM. Za užití optimálního řešiče lineárních soustav, např. multigridu, je výsledná složitost u konečných prvků  $\mathcal{O}(n)$ , zatímco

---

<sup>1</sup>Finite element method

<sup>2</sup>Nejmarkantnější je tato situace u vnějších úloh.

u hraničních prvků máme dvě situace:  $\mathcal{O}\left(n^{\frac{4}{3}}\right)$  před sparsifikací,  $\mathcal{O}\left(n^{\frac{2}{3}}\right)$  po ní. Zdálo by se tak, že zředování matic, sestavených pomocí BEM, je jasnou volbou.

Jak již ale bylo naznačeno, vektorizace poskytuje alternativní cestu, neboť za jejího užití lze účinně řešit i soustavy s hustými maticemi. Klasická BEM pracuje na bázi po částech nespojitých konstantních, respektive v určitých variantách lineárních spojitých bazových funkcí. Smyslem následujícího textu je především prezentace síly BEM při zapojení obecně polynomiální báze. Přes jisté technické obtíže se totiž při totožném odhadu chyby dále bude redukovat dimenze soustav. Pro dostatečně vysoký řád báze tak mohou být produkované soustavy natolik „malé“, že v kombinaci s vektorizací bychom mohli ve výsledku dostat velmi zajímavou rychlost nalezení řešení o určité přesnosti, ať už ve srovnání s klasickým BEM, či FEM. Tato práce je postupně vystavěna právě za cílem prezentovat srovnání metody vyšších řádů s klasickou variantou, a spolu s tím je částečně věnována i metodám numerické integrace, vhodným pro efektivní konstrukci příslušných soustav.

## 2 Základní pojmy

V této krátké kapitole si uvedeme několik nezbytných definic a poznatků, bez nichž bychom se v dalším textu neobešli. Jedná se především o poznatky z funkcionální analýzy. Mimo jiných budeme čerpat z [3, 10].

**Definice 2.1** *Nechť  $\Omega \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ . Pak  $\forall p \in \mathbb{N}$  množinu<sup>3</sup>  $L^p(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^* : \int_{\Omega} |f(x)|^p dx < \infty\}$  s normou  $\|f\|_p = \sqrt[p]{\int_{\Omega} |f(x)|^p dx}$  a pro  $p = \infty$  množinu  $L^\infty(\Omega) := \{f : \exists M \in \mathbb{R} : |f(x)| \leq M \text{ pro s.v. } x \in \Omega\}$  s normou  $\|f\|_\infty = \text{ess sup}_{\Omega} |f|$ , nazýváme **Lebesgueovými prostorem**.*

*Navíc, definujeme  $L^p_{loc}(\Omega) = \{f : (\forall x \in \Omega)(\exists \varepsilon > 0) : f \in L^p(\mathcal{U}(x, \varepsilon))\}$ .*

**Poznámka 2.1** Je možné dokázat následující vlastnosti  $L^p$  prostorů:

1.  $\forall p \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$  je  $L^p(\Omega)$  Banachův prostor,
2.  $L^2(\Omega)$  se skalárním součinem

$$(u, v) = \int_{\Omega} u(x)v(x)dx,$$

je Hilbertův prostor,

3. jestliže  $\lambda(\Omega) < \infty$ , pak  $\forall p, q \in \mathbb{N} \cup \{\infty\} : p < q$  platí  $L^q(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ .

**Definice 2.2** *Nechť  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ .*

- Označme  $\mathcal{D}(\Omega) = \{\varphi \in C^\infty(\Omega) : \text{supp } \varphi \text{ je kompaktní podmnožinou } \Omega\}$ .  $\mathcal{D}^*(\Omega)$  nazveme prostorem **distribucí** nad množinou  $\Omega$ .
- Distribuci  $\Phi \in \mathcal{D}^*(\Omega)$  označíme jako **regulární**, jestliže existuje funkce  $\phi \in L^1_{loc}(\Omega)$  taková, že

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) : \Phi(\varphi) = \int_{\Omega} \phi(x)\varphi(x)dx.$$

- Derivací funkce  $\phi \in L^1_{loc}(\Omega)$  ve smyslu distribucí rozumíme distribuci  $\frac{\partial \phi}{\partial x_i}$  takovou, že

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) : \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial x_i}, \varphi \right\rangle = - \int_{\Omega} \phi(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) dx.$$

Druhý bod předchozí definice nám mimo jiné říká, že regulární distribuce můžeme v jistém smyslu ztotožnit s funkcemi z  $L^1_{loc}(\Omega)$ . Ze třetího bodu jednoduchým opakováním vyplývá, že

---

<sup>3</sup>Funkce, lišící se na množině nulové míry považujeme za totožné.

pro libovolný multiindex  $\alpha$  platí<sup>4</sup>

$$\langle D^\alpha \phi, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} \phi(x) D^\alpha \varphi(x) dx.$$

**Definice 2.3** *Nechť  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  je omezená oblast. **Sobolevův prostor**  $W^{k,p}(\Omega)$  definujeme jako zúplnění  $C^\infty(\overline{\Omega})$  vzhledem k normě*

$$\|f\|_{k,p} = \sqrt[p]{\|f\|_p^p + \int_{\Omega} \sum_{0 < |\alpha| \leq k} |D^\alpha f(x)|^p dx}.$$

Dále definujeme prostor  $W_0^{k,p}(\Omega)$  jako

$$W_0^{k,p}(\Omega) := \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{k,p}}$$

**Věta 2.1 (Friedrichsova)**

$$\|f\|_{k,p} = \sqrt[p]{\int_{\Omega} \sum_{|\alpha|=k} |D^\alpha f(x)|^p dx},$$

je na  $W_0^{k,p}(\Omega)$  ekvivalentní normou s  $\|\cdot\|_{k,p}$ .

**Definice 2.4** *Nechť  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$  je omezená oblast. Jestliže je splněno*

$$(\exists x_1, \dots, x_m \in \partial\Omega)(\exists \zeta_1, \dots, \zeta_m \in \mathbb{R}^+) : \partial\Omega \subset \bigcup_{i=1}^m \mathcal{U}(x_i, \zeta_i),$$

a  $\forall i \in \{1, \dots, m\}$  existuje lokální kartézský systém souřadnic  $(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) =: (\hat{x}, x_n)$  takový, že

$$(\exists \varepsilon_i, \delta_i \in \mathbb{R}^+)(\exists a : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}) :$$

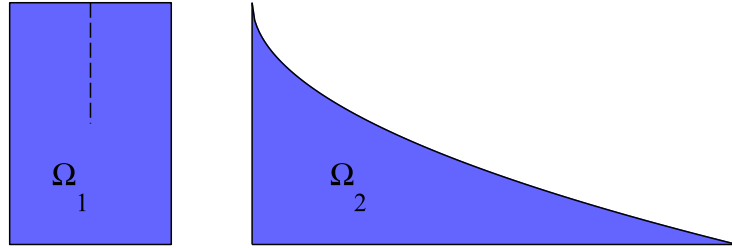
- $\mathcal{U}(x_i, \zeta_i) \cap \partial\Omega = \{(\hat{x}, x_n) \in \mathbb{R}^n : \|\hat{x}\| < \delta_i : a(\hat{x}) = x_n\},$
- $\{(\hat{x}, x_n) \in \mathbb{R}^n : \|\hat{x}\| < \delta_i : a(\hat{x}) < x_n < a(\hat{x}) + \varepsilon_i\} \subset \Omega,$
- $\{(\hat{x}, x_n) \in \mathbb{R}^n : \|\hat{x}\| < \delta_i : a(\hat{x}) - \varepsilon_i < x_n < a(\hat{x})\} \subset \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega},$
- $(\exists L \in \mathbb{R}^+)(\forall \hat{x}, \hat{y} \in \{\hat{z} \in \mathbb{R}^{n-1} : \|\hat{z}\| < \delta_i\}) : |a(\hat{x}) - a(\hat{y})| \leq L \|\hat{x} - \hat{y}\|,$

označujeme  $\Omega$  jako **oblast s lipschitzovskou hranicí**.

---

<sup>4</sup> $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ,  $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$ ,  $u \in C^{|\alpha|} : D^\alpha u := \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial^{\alpha_1} x_1 \dots \partial^{\alpha_n} x_n}.$

Volně řečeno si můžeme oblast z předchozí definice představit tak, že při pokrytí její hranice konečně mnoha „kruhy“ bude v každém z těchto kruhů daná část hranice vzhledem k vhodnému kartézskému systému grafem lipschitzovsky spojitě funkce. Jelikož je známo<sup>5</sup>, že lipschitzovsky spojitě funkce na otevřené množině jsou diferencovatelné s.v., znamená to, že pro s.v.  $x \in \partial\Omega$  existuje jednotkový vektor vnější normály  $n(x)$  k  $\partial\Omega$ .



Obrázek 1: Příklady oblastí, které nemají lipschitzovskou hranici

**Poznámka 2.2** Pokud je  $\Omega$  oblast s lipschitzovskou hranicí,  $W^{k,p}(\Omega)$  ekvivalentně definujeme jako

$$W^{k,p}(\Omega) = \{f \in L^p(\Omega) : \forall \alpha, |\alpha| \leq k : D^\alpha f \in L^p(\Omega)\}.$$

V dalším textu se dohodněme na označení

- $H^k(\Omega) \stackrel{\text{ozn.}}{=} W^{k,2}(\Omega)$ ,
- $H^1_\Delta(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) : \Delta v \in L^2(\Omega) \text{ ve smyslu distribucí}\}$  a
- $\mathcal{L}$  jako množinu všech jednoduše souvislých oblastí s lipschitzovskou hranicí.

**Věta 2.2 (O spojitěm rozšíření lineárního zobrazení)** *Nechť  $X$  a  $Y$  jsou Banachovy prostory,  $M$  je hustý podprostor  $X$ , tj.  $\overline{M} = X$ . Dále nechť  $L \in \mathcal{L}(M, Y)$ . Pak platí*

$$(\exists! \tilde{L} \in \mathcal{L}(X, Y)) (\forall m \in M) : \tilde{L}m = Lm,$$

$$\|\tilde{L}\|_{\mathcal{L}(X, Y)} = \|L\|_{\mathcal{L}(M, Y)}.$$

**Věta 2.3 (O stopách)** *Nechť  $\Omega \in \mathcal{L}$ . Pak existuje právě jedno spojitě a lineární zobrazení  $\gamma : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\partial\Omega)$  takové, že*

$$(\forall f \in C^\infty(\overline{\Omega})) : \gamma(f) = f|_{\partial\Omega}.$$

**Definice 2.5** *Nechť  $\Omega \in \mathcal{L}$ . Vektorový prostor  $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$  definujeme jako  $\gamma(H^1(\Omega))$ .*

---

<sup>5</sup>Rademacherova věta

Jelikož stopa  $\gamma$  je spojité lineární zobrazení,  $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$  je zjevně uzavřeným podprostorem  $L^2(\partial\Omega)$ .

#### Věta 2.4

1.  $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$  s normou  $\|v\|_\gamma = \inf_{\gamma u=v} \|u\|_{H^1(\Omega)}$  je Banachův prostor.
2. Nechť  $\mathbb{R}^n \supset \Omega \in \mathcal{L}$ . Platí

$$v \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \quad \Leftrightarrow \quad |v|_{\frac{1}{2}}^2 := \int_{\partial\Omega} \int_{\partial\Omega} \frac{|v(x) - v(y)|^2}{\|x - y\|^n} dS(x) dS(y) < +\infty.$$

Navíc, norma

$$v \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) : \|v\|_{\frac{1}{2}} = \sqrt{\|v\|_{L^2(\partial\Omega)}^2 + |v|_{\frac{1}{2}}^2}$$

je na  $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$  ekvivalentní normou  $\|\cdot\|_\gamma$ .

3.  $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$  se skalárním součinem

$$(u, v)_{\frac{1}{2}} = (u, v)_{L^2(\partial\Omega)} + \int_{\partial\Omega} \int_{\partial\Omega} \frac{|u(x) - u(y)| |v(x) - v(y)|}{\|x - y\|^n} dS(x) dS(y)$$

je Hilbertův prostor.

Poznamenejme, že uvedená norma bývá označována jako Sobolevova-Slobodeckého norma. S užitím Věty 2.4 se dá Věta o stopách zesílit:

**Lemma 2.1** Nechť  $\Omega \in \mathcal{L}$ . Pak platí

$$\left( \exists! \gamma_D \in \mathcal{L} \left( H^1(\Omega), H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \right) \right) (\forall f \in C^\infty(\overline{\Omega})) : \gamma_D(f) = f|_{\partial\Omega}.$$

#### Příklad 1

Nyní si pro úplnost ukážeme, že platí  $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \subsetneq L^2(\partial\Omega)$ , a to nalezením příkladu funkce  $f \in L^2(\partial\Omega) \setminus H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ . Vezměme  $\Omega = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 < 1\}$  a  $f : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , přičemž

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} 1, & x_2 > 0, \\ 0, & x_2 \leq 0. \end{cases}$$

Ukážeme, že  $|f|_{\frac{1}{2}} = \infty$ :

$$\begin{aligned}
& \int_{\partial\Omega} \int_{\partial\Omega} \frac{|f(x) - f(y)|^2}{\|x - y\|^2} d\ell(y) d\ell(x) \geq \int_{x_2 \leq 0} \int_{x_2 > 0} \frac{|f(x) - f(y)|^2}{\|x - y\|^2} d\ell(y) d\ell(x) = \\
& = \int_{\pi}^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{1}{\| \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \cos s \\ \sin s \end{bmatrix} \|^2} ds dt = \frac{1}{2} \int_{\pi}^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{1}{1 - (\cos t \cos s + \sin t \sin s)} ds dt = \\
& = \frac{1}{2} \int_{\pi}^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{1}{1 - \cos(t-s)} ds dt = \frac{1}{2} \int_{\pi}^{2\pi} \int_{t-\pi}^t \frac{1}{1 - \cos u} du dt = \frac{1}{4} \int_{\pi}^{2\pi} \int_{t-\pi}^t \frac{1}{\sin^2(\frac{u}{2})} du dt = \\
& = \frac{1}{4} \int_{\pi}^{2\pi} \int_{t-\pi}^t \frac{1}{\operatorname{tg}^2(\frac{u}{2}) \cos^2(\frac{u}{2})} du dt = \frac{1}{2} \int_{\pi}^{2\pi} \int_{\operatorname{tg}(\frac{t-\pi}{2})}^{\operatorname{tg}(\frac{t}{2})} \frac{1}{v^2} dv dt = \\
& = \frac{1}{2} \int_{\pi}^{2\pi} \left( \operatorname{tg}\left(\frac{t-\pi}{2}\right) - \operatorname{tg}\left(\frac{t}{2}\right) \right) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} q dq - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \operatorname{tg} q dq = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} q dq = \\
& = 2 \cdot \lim_{a \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} [\ln(\sin q)]_0^a = 2 \cdot (-(-\infty) + 0) = \infty.
\end{aligned}$$

Takže dle druhého bodu Věty 2.4 vidíme, že  $L^2(\partial\Omega) \ni f \notin H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ . ■

**Poznámka 2.3** Prostor  $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$  lze (mimo jiných možností) ekvivalentně definovat jako

$$H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) := \overline{C^\infty(\partial\Omega)}^{\|\cdot\|_{\frac{1}{2}}}.$$

**Definice 2.6** Prostor  $H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$  definujeme jako  $\left[H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)\right]^*$ .

**Věta 2.5 (Inverzní o stopách)** Nechť  $\Omega \in \mathcal{L}$ . Pak k operátoru stop  $\gamma$  existuje spojitá pravá inverze  $\varepsilon : H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \rightarrow H^1(\Omega)$ , tj.

$$\forall g \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) : (\gamma \circ \varepsilon)(g) = g.$$

**Poznámka 2.4** Nechť  $\Omega \in \mathcal{L}$ . Sobolevův prostor  $W_0^{k,p}(\Omega)$  lze alternativně definovat jako

$$W_0^{k,p}(\Omega) := \{f \in W^{k,p}(\Omega) : \gamma(f) = 0\}.$$

**Věta 2.6 (Rieszova)** Nechť  $H$  je Hilbertův prostor a  $f \in H^*$ . Pak platí

$$(\exists! u \in H)(\forall v \in H) : f(v) = (u, v),$$

$$\|u\|_H = \|f\|_{H^*}.$$

### 3 Gaussovy kvadratury

Během příští kapitoly uvidíme, že při sestavování matic v metodě hraničních prvků budeme potřebovat vyčíslit příslušné integrály. Je takřka nemyslitelné je všechny počítat analyticky, a právě Gaussovy kvadraturní formule nám dávají velmi silný nástroj k jejich numerickému řešení. Poznátka této kapitoly jsou inspirovány [5, 9].

#### 3.1 Ortogonální polynomy

**Definice 3.1** *Nechť  $w \in L^1(\Omega)$ ,  $w(x) > 0$  pro s.v.  $x \in \Omega$  a pro každou funkci  $f \in L^2(\Omega)$  platí  $\int_{\Omega} f(x)w(x)dx < \infty$ .*

- Funkci  $w$  nazýváme **váhovou funkcí**,
- zobrazení  $(\cdot, \cdot)_w : L^2(\Omega) \times L^2(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  definované předpisem

$$(f, g)_w = \int_{\Omega} w(x)f(x)g(x)dx$$

*nazýváme **skalárním součinem** vzhledem k váhové funkci  $w$ .*

**Poznámka 3.1** *Není těžké si rozmyslet, že  $(\cdot, \cdot)_w$  je skutečně skalárním součinem pro funkce z  $L^2(a, b)$ . Všimněme si, že uvedený skalární součin má následující vlastnost:*

$$(xf, g)_w = \int_{\Omega} w(x)xf(x)g(x)dx = \int_{\Omega} w(x)f(x)xg(x)dx = (f, xg)_w.$$

Tato vlastnost bude později důležitá při zavedení rekurentního vztahu mezi ortogonálními polynomy.

**Definice 3.2** *Nechť  $L^1(a, b) \ni w(x) > 0$  pro s.v.  $x \in \langle a, b \rangle \subset \mathbb{R}$ . Systém polynomů  $p_i, i \in \{1, \dots, n\}$ , splňující*

$$\forall i, j \in \{1, \dots, n\}, i \neq j : (p_i, p_j)_w = 0$$

*nazveme systémem polynomů, **ortogonálních** vzhledem ke skalárnímu součinu  $(\cdot, \cdot)_w$ . Pokud navíc platí*

$$(p_i, p_i)_w = 1,$$

*nazveme tento systém **ortonormální**.*

Následující slavný poznatek nám přitom dává nástroj, jak ortonormální systém generovat:



**Věta 3.1 (Gram-Schmidtův ortonormalizační proces)** *Nechť  $X$  je separabilní Hilbertův prostor<sup>6</sup>, a  $P = \{p_i : i \in M \subseteq \mathbb{N}\}$  je množina vzájemně lineárně nezávislých prvků prostoru  $X$ . Pak množina  $\tilde{P} = \{\tilde{p}_i : i \in M\}$ , kde*

$$\tilde{p}_1 = \frac{p_1}{\|p_1\|}, \quad \tilde{p}_i = \frac{p_i - \sum_{k=1}^{i-1} (\tilde{p}_k, p_i) \tilde{p}_k}{\left\| p_i - \sum_{k=1}^{i-1} (\tilde{p}_k, p_i) \tilde{p}_k \right\|},$$

*tvorí ortonormální systém.*

Pro různé váhové funkce  $w$  pak můžeme vytvořit z množiny monomiálů  $P = \{m_i : m_i(x) = x^i, i \in M \subseteq \mathbb{N}\}$  ortonormální systém. Tento přístup je v jistém smyslu nejpřirozenější, nikoliv však jediný správný. Uvažme, že máme-li v posloupnosti ortogonálních polynomů polynom  $j$ -tého stupně ve tvaru  $p_j(x) = \sum_{i=0}^j c_i x^i$ , lze tento v jistém smyslu normovat tak, aby  $c_j = 1$ , aniž bychom porušili ortogonalitu. Vyjdeme-li z této skutečnosti, získáváme poměrně zajímavý vztah, jenž je shrnut v následujícím lemmatu:

**Lemma 3.1** *Nechť  $w$  je váhová funkce na intervalu  $\langle a, b \rangle \subset \mathbb{R}$  a  $p_0, p_1, \dots \in X$ , jsou polynomy, ortogonální vzhledem ke skalárnímu součinu  $(\cdot, \cdot)_w$ . Definujme  $p_{-1}(x) = 0$ ,  $p_0(x) = 1$ . Pak pro všechna  $n \in \mathbb{N}$  platí rekurentní vztah*

$$p_{n+1}(x) = \left( x - \frac{(xp_n, p_n)_w}{(p_n, p_n)_w} \right) p_n(x) - \frac{(p_n, p_n)_w}{(p_{n-1}, p_{n-1})_w} p_{n-1}(x). \quad (3.1)$$

Ukažme si na příkladu s využitím uvedené rekurence drobnou zajímavost, kterou použijeme později:

### Příklad 2

Legendreovy polynomy  $L_i(x)$ , zkonstruované vzhledem k váhové funkci  $w(x) = 1$ , a to nejčastěji na intervalu  $\langle -1, 1 \rangle$ , jsou pravděpodobně nejznámějším systémem ortogonálních polynomů. Mimo jiné se pro ně pomocí uvedeného rekurentního vztahu dá ukázat, že platí  $L_k(-x) = (-1)^k L_k(x)$ .<sup>7</sup>

Uvažme tedy  $L_0(x) = 1$ . Není těžké rekurencí rychle spočítat, že  $L_1(x) = x$ . Všimněme si, že  $L_0$  je sudá a  $L_1$  lichá funkce. Vezmeme-li toto jako základ indukce a pro polynomy do stupně  $n$  předpokládáme platnost vlastnosti, pak

<sup>6</sup>Tj. má nejvýše spočetnou hustou podmnožinu.

<sup>7</sup>Obecně pro všechny ortogonální polynomy, zkonstruované vzhledem k váhové funkci, symetrické kolem osy intervalu, lze ukázat podobná symetrie/antisymetrie.

$$\begin{aligned}
L_{n+1}(-x) &= \left(-x - \frac{(-xL_n, L_n)_w}{(L_n, L_n)_w}\right) L_n(-x) - \frac{(L_n, L_n)_w}{(L_{n-1}, L_{n-1})_w} L_{n-1}(-x) \\
&= -(-1)^n \left(x - \frac{(xL_n, L_n)_w}{(L_n, L_n)_w}\right) L_n(x) - (-1)^{n-1} \frac{(L_n, L_n)_w}{(L_{n-1}, L_{n-1})_w} L_{n-1}(x) \\
&= (-1)^{n+1} L_{n+1}(x).
\end{aligned}$$

■

Další důležitá vlastnost ortogonálních polynomů tkví v jejich kořenech.

**Lemma 3.2** *Nechť  $\{p_i\}_{i=0}^n$  je množina ortogonálních polynomů na intervalu  $\langle a, b \rangle \subset \mathbb{R}$ . Pak pro všechna  $k \in \{0, \dots, n\}$  platí, že  $p_k$  má právě  $k$  různých kořenů v intervalu  $\langle a, b \rangle$ .*

**Důkaz.** Pro  $k = 0$  platí tvrzení triviálně. Pro libovolné nenulové  $k$  platí

$$\int_a^b w(x) p_k(x) dx = \int_a^b w(x) \cdot 1 \cdot p_k(x) dx = \int_a^b w(x) \cdot p_0(x) \cdot p_k(x) dx = 0.$$

Poslední krok plyne z ortogonality. Protože ani  $p_k$ , ani  $w$  nejsou identicky nulové a navíc  $w > 0$ , musí  $p_k$  na intervalu  $\langle a, b \rangle$  měnit znaménko - má alespoň jeden kořen  $x_0 \in \langle a, b \rangle$  liché násobnosti.

Nechť tedy  $x_0, \dots, x_l$  jsou všechny kořeny  $p_k$ , které mají lichou násobnost a leží v intervalu  $\langle a, b \rangle$ . Označme  $z(x) = \prod_{i=0}^l (x - x_i)$ . Pak máme  $\int_a^b w(x) z(x) p_k(x) dx \neq 0$ , jelikož integrand má v  $\langle a, b \rangle$  všechny kořeny sudé násobnosti. V případě, že  $l < k$  však máme spor, neboť  $p_k$  musí být ortogonální ke všem polynomům stupně nižšího, než má sám. Skutečně

$$(p_k, z)_w = \int_a^b w(x) p_k(x) z(x) dx = \int_a^b w(x) p_k(x) \sum_{i=0}^l c_i p_i(x) dx = \sum_{i=0}^l c_i \underbrace{\int_a^b w(x) p_k(x) p_i(x) dx}_{=0} = 0,$$

tudíž  $l \geq k$ . Zároveň dle základní věty algebry, součet násobností všech kořenů polynomu stupně  $k$  je přímo roven  $k$ ,  $p_k$  tedy nemůže mít více, než  $k$  kořenů, a tak  $l = k$ . ■

### 3.2 Obecná Gaussova kvadratura

Nyní se věnujme samotné numerické integraci. Možností, jak k problému přistupovat je bezpočet, v následujícím textu se budeme zabývat především kvadraturami, vycházejícími z interpolace integrandu.

Mějme tedy, pro jednoduchost nejprve na omezeném intervalu  $\langle a, b \rangle$ , sít bodů  $x_0, x_1, \dots, x_n$  tak, že  $a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq b$ . Označíme-li  $f_I$  jako interpolační polynom funkce  $f$  v uzlech

$x_0, \dots, x_n$ , můžeme psát

$$\int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b f_I(x) dx,$$

přičemž uvážíme-li Lagrangeův interpolační polynom, dostáváme

$$\int_a^b w(x) f(x) dx \approx \sum_{i=0}^n w_i f(x_i), \text{ kde } w_i := \int_a^b w(x) \underbrace{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}}_{\text{ozn. } l_i(x)} dx. \quad (3.2)$$

Přesnost takovéto metody zjevně závisí na přesnosti samotné interpolace. Z toho plyne, že toto zavedení nám dává jistotu, že uvedené integrační pravidlo je přesné pro polynomy do stupně  $n$ . Pro ostatní funkce jsme odkázáni na chybu interpolace. Konkrétně pro Lagrangeovu interpolaci stupně  $n$  na intervalu  $\langle a, b \rangle$  se dá ukázat, že pro chybu interpolace  $e(x)$  platí

$$f \in C^{n+1}(\langle a, b \rangle) \Rightarrow (\forall x \in \langle a, b \rangle)(\exists \xi \in \langle a, b \rangle) : e(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{j=0}^n (x - x_j).$$

Pokud však chceme metodu zpřesnit, ukazuje se výhodným použít jakožto uzly interpolace kořeny ortogonálních polynomů.

**Věta 3.2** *Nechť  $w$  je váhová funkce na intervalu  $(a, b)$ , a  $\{p_i\}_{i=0}^{n+1}$  je posloupnost polynomů, ortogonálních vzhledem k  $(\cdot, \cdot)_w$ . Mějme kořeny  $p_{n+1}$*

$$a < x_0 < \dots < x_n < b.$$

*Pak existují konstanty  $\{w_i\}_{i=0}^n$  takové, že pro všechny polynomy  $f$  stupně nejvýše  $2n+1$  platí*

$$\int_a^b w(x) f(x) dx = \sum_{i=0}^n w_i f(x_i).$$

Kvadrurní formuli, uvedenou v předchozí větě, nazýváme **Gaussovou kvadrurní formulí**. Její nevýhodou může být poměrně pracná konstrukce vah a bodů, nicméně tyto jsou již pro nejběžnější kvadrurní formule známy. Při konstrukci vlastního pravidla stačí vypočítané hodnoty tabelovat, abychom předešli prodlužování výpočtů tím, že bychom pokaždé sít bodů a vah konstruovali znova.

### Příklad 3

Gaussova-Legendreova kvadratura, zkonstruovaná vzhledem k váhové funkci  $w(x) = 1$ , je nejběžněji užívanou formou Gaussovy kvadratury na omezených intervalech. Vzhledem k užití váhové funkce nám dává možnost přesně integrovat přímo polynomy. Nejčastěji je uváděna pro interval

$\langle -1, 1 \rangle$ , nicméně ji lze přenést na obecný (omezený) interval  $\langle a, b \rangle$  namapováním kořenů a vah pomocí lineární transformace

$$\tilde{x}_i^n = \frac{(b-a)x_i^n + a + b}{2}, \quad \tilde{w}_i = \frac{(b-a)w_i}{2}$$

kde  $x_i^n$  je  $i$ -tý kořen Legendreova polynomu stupně  $n$  na intervalu  $\langle -1, 1 \rangle$  a  $w_i$  jemu odpovídající váha. Obdobná transformace se dá v případě potřeby provést i pro jiné kvadratury. ■

Dá se ukázat, že pro polynomy stupně vyššího, než  $2n+1$  již nelze zkonstruovat přesné pravidlo na  $n+1$  uzlech. V tomto smyslu je tak Gaussova kvadratura nejpřesnější možná. Obecně pro jiné funkce, než pro polynomy do stupně  $2n+1$  platí následující odhad. [14]

**Věta 3.3** *Je-li funkce  $f$  na intervalu  $\langle a, b \rangle$  analytická, pak pro chybu Gaussovy-Legendreovy kvadratury na  $n$  uzlech platí*

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \sum_{i=0}^n w_i f(x_i) \right| \in \mathcal{O}(10^{-n}).$$

### 3.3 Gauss-log kvadratura

Ted, když jsme si řekli něco o obecné Gaussově kvadratuře, můžeme se podívat na konkrétní případ, jenž využijeme především při sestavování matice potenciálu jednoduché vrstvy. V našem budoucím případě se budeme muset zabývat integrály přes interval, na některém jehož konci se nachází singularita. I takovéto integrály se však dají výhodně numericky počítat s využitím Gaussovy kvadratury za aplikace vhodné váhové funkce, která je singulární ve stejných bodech jako integrand, nicméně i přesto splňuje požadované vlastnosti váhové funkce na daném intervalu. Singulární funkci  $f$  poté zapíšeme jako součin příslušné váhové funkce a funkce  $\bar{f}$ , která již singularitu nemá.

#### Příklad 4

1. Integrály, mající singularitu v krajních bodech intervalu  $(-1, 1)$  lze řešit za použití váhové funkce

$$w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Hovoříme o tzv. Gaussově-Čebyševově kvadratuře.

2. Pokud potřebujeme počítat nevlastní integrál na intervalu  $(0, \infty)$ , poslouží nám

$$w(x) = e^{-x}.$$

V tomto případě se jedná o tzv. Gaussovu-Laguerrovu kvadraturu.

3. Integrujeme-li přes celou reálnou osu, můžeme užít váhu

$$w(x) = e^{-x^2}.$$

Pravidlo získané skrze tuto funkci se nazývá Gaussova-Hermitova kvadratura. ■

Nyní si pojďme ukázat, na kolik rozdílné výsledky nám pro singulární integrand dá „klasická“ Gaussova-Legendreova kvadratura ve srovnání s vhodnější formulí.

### Příklad 5

Mějme  $\int_{-1}^1 f(x)dx$ , kde  $f(x) = \frac{\tan^2(x)}{\sqrt{1-x^2}}$ :

$n$	Gauss-Legendre	Gauss-Čebyšev
2	1.99045	0.73583
3	1.34726	0.13422
4	1.00136	0.02217
5	0.79925	0.00348
6	0.66750	0.00053
10	0.40607	$2.36 \cdot 10^{-7}$
20	0.20653	$10^{-15}$

Tabulka 2: Srovnání chyby výpočtu integrálu pomocí Gaussovy-Legendreovy a poté Gaussovy-Čebyševovy kvadratury ■

Jak již název podkapitoly prozrazuje, podíváme se blíže na kvadraturu, u které budeme uvažovat jako váhovou funkci  $w(x) = -\ln x$ . Díky této konstrukci budeme moci efektivně vyčíslit integrály na intervalu  $(0, 1)$  se singularitou v bodě 0.

Zaměříme se nyní podrobněji na získání bodů  $x_0, \dots, x_n$  a vah  $w_0, \dots, w_n$  pro Gauss-log:

- Našimi vstupními daty jsou  $w(x) = -\ln x$ ,  $a = 0$ ,  $b = 1$  a stupeň  $n$ , do něž chceme hodnoty zkonstruovat,
- pomocí rekurentního vztahu z Lemmatu 3.1 sestavujeme posloupnost ortogonálních polynomů až do stupně  $n$ ,
- pro každý z těchto polynomů  $p_{k+1}$  nalezneme příslušné kořeny  $x_0, \dots, x_k$  - tím získáváme kvadraturní uzly,

- pro váhy  $w_0, \dots, w_k$  sestavíme soustavu

$$\begin{bmatrix} p_0(x_0) & p_0(x_1) & \dots & p_0(x_k) \\ p_1(x_0) & p_1(x_1) & \dots & p_1(x_k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_k(x_0) & p_k(x_1) & \dots & p_k(x_k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \\ \vdots \\ w_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_a^b w(x) dx \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},$$

jejímž řešením získáme hodnoty vah pro daný řád kvadratury  $k$ .

**Poznámka 3.2** Tvar pravé strany plyne z ortogonalit polynomů:

$$j \in \{1, \dots, k\} : \int_a^b w(x) p_j(x) dx = \int_a^b w(x) \cdot 1 \cdot p_j(x) dx = \int_a^b w(x) p_0(x) p_j(x) dx = 0.$$

Co se levé strany týče, můžeme si povšimnout, že při uvedeném postupu nám vzniká Vandermondova matice, jež je obecně velmi špatně podmíněná. Konkrétněji se dá ukázat, že je-li  $\mathbb{V}_n$  Vandermondova matice řádu  $n$ , pak pro její číslo podmíněnosti platí (viz [6])

$$\kappa(\mathbb{V}_n) \in o(n \cdot 10^n),$$

nicméně v našem případě řešíme pouze relativně malé soustavy a jelikož si váhy tabelujeme, nenastane ani překážka v podobě opakovaného řešení špatně podmíněné soustavy. Alternativní možností je zkonstruovat v kořenech  $x_0, \dots, x_k$  dílčí interpolační polynom  $l_k(x)$  a váhu počítat jako v 3.2.

### Příklad 6

Srovnajme nyní Gaussovu-Legendreovu kvadraturu s Gauss-log kvadraturou pro případ  $\int_0^1 f(x) dx$ , kde  $f(x) = \frac{\sin(x) \ln(x)}{x}$ :

$n$	Gauss-Legendre	Gauss-log
2	0.10363	0.00002
3	0.05229	$3 \cdot 10^{-8}$
4	0.03145	$3 \cdot 10^{-11}$
5	0.02030	$1,5 \cdot 10^{-14}$
6	0.01501	0
10	0.00574	0

Tabulka 3: Srovnání chyby výpočtu integrálu pomocí Gaussovy-Legendreovy a Gauss-log kvadratury

■

**Poznámka 3.3** Je zde předpoklad, že pro Gauss-log kvadraturu platí podobný odhad jako pro Gaussovu-Legendreovu kvadraturu (viz Věta 3.3). Tento odhad však zatím můžeme dokumentovat pouze experimentálně. Důkaz konvergenčních vlastností by mohl být námětem další práce.

Závěrem této kapitoly si uveďme několik alternativ ke Gaussovým kvadraturám. V praxi<sup>8</sup> je občas nutné numericky vyčíslit integrály o vysoké dimenzi. Pro tyto případy Gaussovy kvadratury pozbývají smysl, neboť jejich realizace se stává poměrně výrazně výpočetně neefektivní. V takovýchto případech se používá integrace založená na metodách Monte Carlo. Jde o stochastický přístup, založený na vhodné metodě vzorkování. Zájemci o téma mohou nahlédnout např. do publikace [13].

Další oblastí, kde mohou čisté Gaussovy kvadratury dávat poměrně nepřesné výsledky jsou rychle oscilující funkce. Pro tyto případy existuje řada modifikací a vylepšení, kupříkladu Levinova kvadratura. Téma numerické integrace funkcí tohoto typu je rozebráno ve článku [7].

Možných metod, majících využití ve specifických situacích existuje celá řada. Gaussova kvadratura tedy jistě není nejlepší metodou numerické integrace obecně vzato. Co je však pro naše účely v této práci ideální, je nejlepší ve smyslu nejvyššího stupně polynomu, jenž dokáže zintegrovat přesně, včetně zahrnutí váhových funkcí.

---

<sup>8</sup>Například v kvantové fyzice a statistice.

## 4 Metoda hraničních prvků

Po stručném seznámení s Gaussovými kvadraturami se pojdme přiblížit k jádru práce. Podíváme se postupně na logickou stavbu a principy BEM ve 2D. Budeme čerpat převážně z [4, 12, 14, 15].

### 4.1 Hraniční integrální formulace

Na úvod se domluvme na značení  $\Gamma := \partial\Omega$ , s tím, že budeme uvažovat množiny  $\Gamma_D$  a  $\Gamma_N$  takové, že  $\overline{\Gamma_D} \cup \overline{\Gamma_N} = \Gamma$  a  $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$ .

Vezměme nyní při „dostatečně hladkých“  $\Omega, f, g, h$  okrajovou úlohu pro Poissonovu rovnici

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & u \in \Omega \\ u = g, & x \in \Gamma_D \\ \frac{du}{dn} = h, & x \in \Gamma_N. \end{cases} \quad (4.1)$$

Tato úloha má v klasickém smyslu řešení za předpokladu  $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\Omega \cup \Gamma_N) \cap C(\Omega \cup \Gamma_D)$ . Dá se ukázat, že úlohu (4.1) lze ve slabém smyslu zobecnit do podoby

$$\Omega \in \mathcal{L}, f \in L^2(\Omega), g \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_D), h \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_N) : \begin{cases} -\Delta u = f, & u \in \Omega \\ \gamma_D u = g, & x \in \Gamma_D \\ \gamma_N u = h, & x \in \Gamma_N, \end{cases} \quad (4.2)$$

kde  $\gamma_D$  chápeme jako operátor stop, a

$$(u \in H_{\Delta}^1(\Omega)) (v \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)) : \langle \gamma_N u, v \rangle := \int_{\Omega} \nabla u(x) \nabla (\varepsilon v)(x) dx - \int_{\Omega} (\varepsilon v)(x) \Delta u(x) dx,$$

přičemž operátorem  $\gamma_N$  rozumíme stopu derivace podle vnější normály, tj.  $\gamma_N u \stackrel{\text{ozn.}}{=} \frac{du}{dn}$ . Co se pravé inverze ke  $\gamma_D$  (viz Věta 2.5) týče, dodejme, že lze  $\varepsilon : H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \rightarrow H^1(\Omega)$  zvolit libovolně.

**Poznámka 4.1** Již víme, že platí  $\gamma_D \in \mathcal{L}(H^1(\Omega), H^{\frac{1}{2}}(\Gamma))$ . Dá se ukázat také  $\gamma_N \in \mathcal{L}(H_{\Delta}^1(\Omega), H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma))$ . Co se prostorů  $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_D), H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_N)$  týče, tyto mají smysl, neboť i prostory na částech hranice lze dobře definovat, viz [10].

Pro funkce  $u \in H^2(\Omega)$  uvažme 2. Greenovu formuli

$$\int_{\Omega} u(y)(-\Delta v(y)) dy = - \int_{\Omega} \Delta u(y)v(y) dy + \int_{\Gamma} \gamma_N u(y) \gamma_D v(y) d\ell(y) - \int_{\Gamma} \gamma_D u(y) \gamma_N v(y) d\ell(y) \quad (4.3)$$



a dále Greenovu funkci  $G : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , kterážto je fundamentálním řešením Laplaceovy rovnice:

$$G(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \ln \|x - y\| ,$$

$$-\Delta_y G(x, y) = \delta_x(y) \text{ ve smyslu distribucí.}$$

Užitím těchto dvou poznatků v kombinaci s předešlou úlohou dostáváme reprezentační formuli pro hodnoty hledané funkce  $u$  pro všechna  $x \notin \Gamma$ .

**Věta 4.1 (O třech potenciálech)** *Mějme úlohu (4.1) a necht  $u \in H^2(\Omega)$ . Potom*

$$\forall x \in \Omega : u(x) = \int_{\Omega} f(y)G(x, y)dy + \int_{\Gamma} \gamma_N u(y)\gamma_D G(x, y)d\ell(y) - \int_{\Gamma} \gamma_D u(y)\gamma_{N,y} G(x, y)d\ell(y), \quad (4.4)$$

kde  $G(x, y)$  je fundamentální řešení Laplaceovy rovnice v  $\mathbb{R}^n$ , centované v bodě  $x$ .

**Důkaz.** Pro libovolně malé  $\varepsilon > 0$  platí

$$\forall y \in \Omega \setminus \mathcal{U}(x, \varepsilon) : \Delta_y G(x, y) = 0.$$

Dosazením do rovnice (4.3) máme

$$\int_{\Omega \setminus \mathcal{U}(x, \varepsilon)} \Delta u(y)G(x, y)dy = \int_{\Gamma} (\gamma_N u(y)\gamma_D G(x, y) - \gamma_D u(y)\gamma_{N,y} G(x, y)) d\ell(y) + \quad (4.5)$$

$$+ \int_{\partial \mathcal{U}(x, \varepsilon)} (\gamma_N u(y)\gamma_D G(x, y) - \gamma_D u(y)\gamma_{N,y} G(x, y)) d\ell(y), \quad (4.6)$$

k dokončení důkazu stačí provést limitní přechod  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ , který zjevně ovlivní pouze druhý sčítanec pravé strany.

Začneme výpočtem první části integrálu:

$$\int_{\partial \mathcal{U}(x, \varepsilon)} \gamma_N u(y)\gamma_D G(x, y)d\ell(y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{du}{dn} \left( x + \varepsilon \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \end{bmatrix} \right) \cdot \varepsilon \cdot \ln \varepsilon dt,$$

a protože

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \varepsilon \ln \varepsilon = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\ln \varepsilon}{\varepsilon^{-1}} \stackrel{\nu_H}{=} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{\varepsilon}}{-\varepsilon^{-2}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} -\varepsilon = 0,$$

tak dostáváme

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\partial \mathcal{U}(x, \varepsilon)} \gamma_N u(y) \gamma_D G(x, y) d\ell(y) = \frac{du}{dn}(x) \cdot 0 = 0.$$

K vyčíslení druhého integrálu po limitním přechodu budeme potřebovat vyjádřit  $\frac{dG}{dn}$ :

$$\begin{aligned} \frac{dG}{dy_i}(x, y) &= -\frac{1}{2\pi} \frac{1}{\|x - y\|} \cdot \frac{1}{2\|x - y\|} \cdot 2(x_i - y_i) \cdot (-1) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{x_i - y_i}{\|x - y\|^2}, \\ \nabla_y G(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{x - y}{\|x - y\|^2}, \\ n(y) &= \frac{x - y}{\varepsilon}. \end{aligned}$$

Tvar jednotkové vnější normály je dán faktem, že pro  $y \in \partial \mathcal{U}(x, \varepsilon)$  platí  $\|x - y\| = \varepsilon$  a orientací vektoru směrem k bodu  $x$ . Skalárním součinem dostáváme

$$\frac{dG}{dn}(x, y) = \nabla_y G(x, y) \cdot n(y) = \frac{1}{2\pi\varepsilon} \cdot \frac{(x - y) \cdot (x - y)}{\|x - y\|^2} = \frac{1}{2\pi\varepsilon}.$$

Dosadíme, a s využitím spojitosti  $u$  můžeme psát

$$\int_{\partial \mathcal{U}(x, \varepsilon)} -\gamma_D u(y) \gamma_{N, y} G(x, y) d\ell(y) = -\frac{1}{2\pi\varepsilon} \int_0^{2\pi} \varepsilon \cdot u \left( x + \varepsilon \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \end{bmatrix} \right) dt \stackrel{\varepsilon \rightarrow 0^+}{=} -\frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi \cdot u(x) = -u(x).$$

Takže jsme limitním přechodem (4.6) zjistili, že

$$\int_{\Omega} \Delta u(y) G(x, y) dy = \int_{\Gamma} (\gamma_N u(y) \gamma_D G(x, y) - \gamma_D u(y) \gamma_{N, y} G(x, y)) d\ell(y) - u(x),$$

z čehož převedením příslušných členů na opačnou stranu získáváme dokazované tvrzení. ■

Uvedené větě se někdy říká také 3. Greenova formule. Její síla spočívá především ve faktu, že k vyjádření řešení nám stačí znát pouze hodnoty  $\gamma_D u$  na  $\Gamma_N$  a  $\gamma_N u$  na  $\Gamma_D$ . Pravá strana (4.4) odpovídá třem integrálním operátorům:

**Definice 4.1** *Nechť  $f \in L^2(\Omega)$ ,  $t, s \in L^\infty(\Gamma)$ . Označme*

$$(N(f))(x) := \int_{\Omega} f(y) G(x, y) dy, \quad (4.7)$$

$$(\tilde{V}(t))(x) := \int_{\Gamma} t(y) G(x, y) d\ell(y), \quad (4.8)$$

$$(W(s))(x) := \int_{\Gamma} s(y) \frac{dG}{dn}(x, y) d\ell(y). \quad (4.9)$$

- Operátor  $N$  nazýváme **Newtonovým potenciálem**,

- operátor  $\tilde{V}$  nazýváme **potenciálem jednoduché vrstvy** a
- operátor  $W$  nazýváme **potenciálem dvojvrstvy**.

Dá se ukázat, že všechny uvedené operátory jsou spojitými lineárními zobrazeními.

**Lemma 4.1** *Nechť  $t, s \in L^\infty(\Gamma)$ . Pak platí*

$$\Delta(\tilde{V}t) = \Delta(Ws) = 0.$$

Díky Větě 2.2 a hustotě  $L^\infty(\Gamma)$  v příslušných prostorech se tyto operátory dají spojitě rozšířit. Shrňme si, jaké definiční obory a cílové prostory mají výsledné rozšířené operátory:

- $N : L^2(\Omega) \rightarrow H^1(\Omega)$ ,
- $\tilde{V} : H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \rightarrow H^1(\Omega)$ ,
- $W : H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \rightarrow H^1(\Omega)$ .

Lemma 4.1 nám dokonce říká, že platí  $(\tilde{V}t), (Ws) \in H_\Delta^1(\Omega)$ , tudíž má smysl skládání hraničních potenciálů se stopami  $\gamma_D$  a  $\gamma_N$ . Touto procedurou postupně získáme 4 hraniční integrální operátory, které budou základem formulace k nalezení slabého řešení úlohy (4.1). Uvedme si ve stručnosti několik Lemmat, shrnujících označení a nejdůležitější vlastnosti těchto operátorů. Podrobnější informace, včetně důkazů, může čtenář nalézt např. v [14, 15].

**Lemma 4.2** *Operátor jednoduché vrstvy*

$$V := \gamma_D \circ \tilde{V} : H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \rightarrow H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$$

*je lineární, omezený a za předpokladu  $\text{diam}(\Omega) < 1$  také  $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ -eliptický, tzn.*

$$\begin{aligned} (\exists c_1 \in \mathbb{R}^+) \left( \forall t \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \right) : \|Vt\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} &\leq c_1 \|t\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)} \quad (\text{omezenost}), \\ (\exists c_2 \in \mathbb{R}^+) \left( \forall t \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \right) : (Vt, t) &\geq c_2 \|t\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)}^2 \quad (\text{elipticita}). \end{aligned}$$

*Navíc platí*

$$(t \in L^\infty(\Gamma)) (x \in \Gamma) : (Vt)(x) = \int_\Gamma t(y)G(x, y)d\ell(y).$$

**Lemma 4.3** *Operátor dvojvrstvy*

$$\gamma_D \circ W : H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \rightarrow H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$$

*je omezený. Navíc platí*

$$(s \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)) (x \in \Gamma) : ((\gamma_D \circ W)s)(x) = (\sigma(x) - 1)s(x) + (Ks)(x),$$

přičemž pro  $s \in L^\infty(\Gamma)$  můžeme psát

$$(x \in \Gamma) : \sigma(x) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{2\pi\varepsilon} \int_{\substack{y \in \Omega \\ \|x-y\|=\varepsilon}} d\ell(y),$$

$$(Ks)(x) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\substack{y \in \Gamma \\ \|x-y\| \geq \varepsilon}} s(y) \gamma_{N,y} G(x, y) d\ell(y).$$

**Poznámka 4.2** Hodnota  $\sigma(x)$  závisí na tom, k jakému „tvaru“ množina  $\{y \in \Omega : \|x - y\| = \varepsilon\}$  konverguje. V případě, že se bod  $x$  nachází na hladké části  $\Gamma$  (jinak řečeno, lze v něm zkonstruovat tečnu, popř. normálu), pak bude množina směřovat k půlkružnici, a tak  $\sigma(x) = \frac{1}{2}$ . Pro  $x$  v nehladkém bodě, tedy vrcholu hranice pak máme  $\sigma(x) = \frac{\phi}{2\pi}$ , přičemž  $\phi$  je úhel při daném vrcholu. Jelikož však máme  $\Omega \in \mathcal{L}$ , víme, že  $\Gamma$  je hladká pro s.v.  $x \in \Gamma$ . Proto budeme v dalším textu pracovat s předpokladem  $\sigma(x) \equiv \frac{1}{2}$ .

**Lemma 4.4** Operátor adjungovaný k operátoru dvojvrstvy

$$\gamma_N \circ \tilde{V} : H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \rightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$$

je omezený. Navíc platí

$$(t \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)) (x \in \Gamma) : ((\gamma_N \circ \tilde{V})t)(x) = \frac{1}{2}t(x) + (K^*t)(x),$$

přičemž pro  $t \in L^\infty(\Gamma)$  můžeme psát

$$(x \in \Gamma) : (K^*t)(x) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\substack{y \in \Gamma \\ \|x-y\| \geq \varepsilon}} t(y) \gamma_{N,x} G(x, y) d\ell(y).$$

Navíc, ve vztahu k operátoru dvojvrstvy platí

$$\left( \forall s \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \right) \left( \forall t \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \right) : \langle K^*t, s \rangle = \langle t, Ks \rangle.$$

Poslední uvedený vztah jasně ilustruje název uvedeného operátoru.

**Lemma 4.5** Hypersingulární operátor

$$-\gamma_N \circ W := D : H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \rightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$$

je omezený a  $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ -semi-eliptický, tj.

$$(\exists c_e \in \mathbb{R}^+) \left( \forall s \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \right) : (Ds, s) \geq c_e |s|_{\frac{1}{2}}^2.$$

Nyní uvažme speciální případ úlohy (4.1) s  $f \equiv 0$ . Použijeme-li Větu 4.4 a aplikujeme operátor  $\gamma_D$ , obdržíme

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_{\Gamma} \gamma_N u(y) \gamma_D G(x, y) d\ell(y) - \int_{\Gamma} \gamma_D u(y) \gamma_N G(x, y) d\ell(y) \\ &= \left( \tilde{V}(\gamma_N u) \right)(x) - (Wg)(x), \quad x \in \Omega \end{aligned} \quad (4.10)$$

$$\gamma_D u(x) = (V(\gamma_N u))(x) + \frac{1}{2} \gamma_D u(x) - (K(\gamma_D u))(x), \quad x \in \Gamma. \quad (4.11)$$

Stejnou úvahu nyní zopakujeme s tím rozdílem, že na (4.10) aplikujeme  $\gamma_N$ :

$$\gamma_N u(x) = \frac{1}{2} \gamma_N u(x) + (K^*(\gamma_N u))(x) + (D(\gamma_D u))(x), \quad x \in \Gamma. \quad (4.12)$$

Tímto postupem jsme získali obecné „předpisy“ pro  $\gamma_D u, \gamma_N u$ . Pro Poissonovu rovnici by do hry vstoupil navíc Newtonův potenciál.

Pokud přidáme další předpoklad,  $\Gamma_N = \emptyset$ ,  $\Gamma_D = \partial\Omega$ , dostáváme Dirichletovu úlohu pro Laplaceovu rovnici

$$\begin{cases} -\Delta u = 0, & u \in \Omega \\ \gamma_D u = g, & x \in \Gamma. \end{cases} \quad (4.13)$$

Pro reprezentaci řešení  $u$  tak potřebujeme nalézt pouze  $\gamma_N u$  na  $\Gamma$ . Převedením a úpravou v (4.11) získáme

$$(V(\gamma_N u))(x) = \left( \left[ \frac{1}{2} I + K \right] g \right)(x), \quad (4.14)$$

kde  $I$  je operátor identity nad  $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ . Jelikož  $I, K \in \mathcal{L}(H^{\frac{1}{2}}(\Gamma), H^{\frac{1}{2}}(\Gamma))$ , což je normovaný lineární prostor, pak jistě i  $\left( \frac{1}{2} I + K \right) \in \mathcal{L}(H^{\frac{1}{2}}(\Gamma), H^{\frac{1}{2}}(\Gamma))$ . Nakonec použijeme variační postup: aplikujeme na (4.14) testovací distribuci  $v \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$  a vzniknuvší rovnost budeme chtít splnit pro všechna taková  $v$ . Výsledná hraniční integrální formulace tak vypadá následovně:

Hledáme  $t \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$  takové, že

$$\forall v \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) : \langle v, Vt \rangle = \left\langle v, \left( \frac{1}{2} I + K \right) g \right\rangle. \quad (4.15)$$

**Poznámka 4.3** Doplňme, že dualitní párování  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}$  lze dle Věty 2.2 ztotožnit se skalárním součinem v  $L^2(\Gamma)$  (viz [14]). Můžeme tudíž psát

$$\langle v, Vt \rangle = \int_{\Gamma} v(x) \int_{\Gamma} t(y) G(x, y) d\ell(y) d\ell(x). \quad (4.16)$$

S přihlédnutím ke skutečnosti, že  $G(x, y)$  je symetrická<sup>9</sup>, můžeme pro  $v, t \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$  za užití Poznámky 4.3 a Fubiniovy věty prohlásit, že  $\langle v, Vt \rangle = \langle t, Vv \rangle$ . Uvedené dualitní párování tak můžeme díky zjištěné symetrii operátoru  $V$  a jeho vlastnostem z Lemmatu 4.2 chápat jakožto skalární součin  $(v, t)_V = (v, Vt)$  nad  $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ . A jelikož  $\tau \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$  a  $\left(\frac{1}{2}I + K\right)g \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ , zjišťujeme další aplikací Věty 2.6, že

$$\left(\exists! t_0 \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)\right) \left(\forall v \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)\right) : \langle v, Vt_0 \rangle = \left\langle v, \left(\frac{1}{2}I + K\right)g \right\rangle.$$

Navíc, toto unikátní řešení  $t_0$  je spojitě závislé na vstupních datech, a tudíž stabilní.

Vraťme se nyní k (4.14). Jelikož víme, že operátor  $V$  je spojitý, lineární a eliptický, plyne z toho, že existuje jeho spojitá lineární inverze, tudíž lze (4.14) přepsat jako

$$\gamma_N u = \underbrace{\left[V^{-1} \left(\frac{1}{2}I + K\right)\right]}_{:=S} \gamma_D u. \quad (4.17)$$

**Definice 4.2** Operátor  $S \in \mathcal{L}\left(H^{\frac{1}{2}}(\Gamma), H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)\right)$  z předchozí rovnice (4.17) se nazývá **Steklovův-Poincarého operátor**.

Tento operátor mapuje Dirichletovskou stopu na Neumannovskou, přesněji řečeno, vyjadřuje vzájemný vztah Cauchyho dat hledaného řešení. Využívá se kupříkladu pro nelineární úlohy, párování metody hraničních prvků s metodou konečných prvků nebo v metodách rozložení oblasti, viz například [11].

## 4.2 Numerická realizace

S využitím hraniční integrální formulace nám stačí zabývat se pouze hranicí zadané oblasti  $\Omega$ . Budeme chtít pomocí diskretizace vyřešit úlohu (4.15), odpovídající hledání  $t \equiv \frac{du}{dn}$  na hranici, a tím potažmo řešení Dirichletovy úlohy pro Laplaceovu rovnici (viz Věta 4.4).

K nalezení přibližného řešení použijeme tzv. Galerkinovský přístup. Ten spočívá v tom, že prostor testovacích funkcí, v našem případě  $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ , aproximujeme konečně-dimenzionálním podprostorem  $V^N$  s vhodnou bází  $(\psi_1, \dots, \psi_N)$ , tj.  $V^N = \text{Lin}\{\psi_1, \dots, \psi_N\}$ , a naše řešení  $t$  budeme hledat v něm. K tomuto účelu použijeme členění hranice na jednotlivé segmenty  $\tau_i \subset \Gamma$ .

**Poznámka 4.4** V dalším textu se dohodneme na označení  $|\tau_i|$  pro délku segmentu  $\tau_i$ .

**Definice 4.3** Množinu křivek  $\mathcal{T} = \{\tau_1, \dots, \tau_N\}$  nazveme **diskretizací** hranice  $\Gamma$ , jestliže platí

$$\Gamma = \bigcup_{i=1}^N \tau_i, \quad i \neq j \Rightarrow \tau_i \cap \tau_j = \emptyset.$$

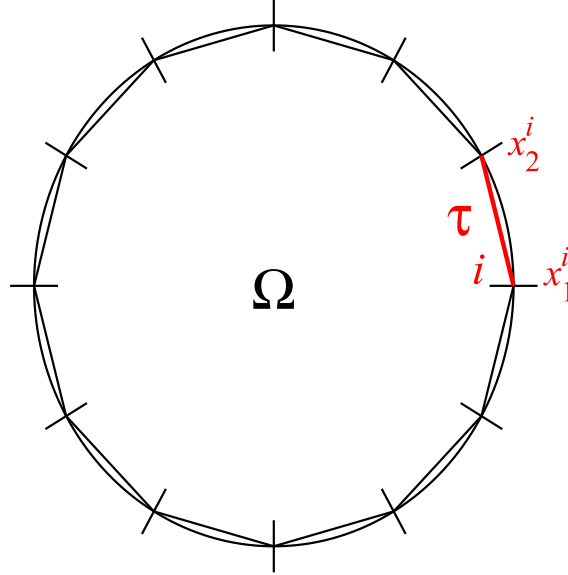
---

<sup>9</sup> $G(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \ln \|x - y\| = -\frac{1}{2\pi} \ln \|y - x\| = G(y, x)$

Třidu diskretizací navíc nazveme **kvazi-uniformní**, pokud existuje  $T > 0$  takové, že pro všechna  $h > 0$  platí<sup>10</sup>

$$\min_i |\tau_i| \geq T \cdot h.$$

V praxi je možno přistupovat k diskretizaci hranice dvěma způsoby - buďto věrně kopírovat skutečnou hranici, nebo  $\Gamma$  aproximovat polygonem a jakožto  $\tau_i$  uvažovat pouze úsečky. Při řešení úlohy na polygonální hranici přirozeně tyto dva přístupy splývají.



Obrázek 2: Příklad aproximace oblasti  $\Omega$  polygonem a diskretizace hranice ve 2D

Mějme tedy, pro jednoduchost polygonální oblast s diskretizací hranice  $\{\tau_1, \dots, \tau_N\}$  o uzlech  $x_1, \dots, x_N$ . Nejběžněji se jako  $\psi_i$  užívají po částech konstantní funkce, tj.

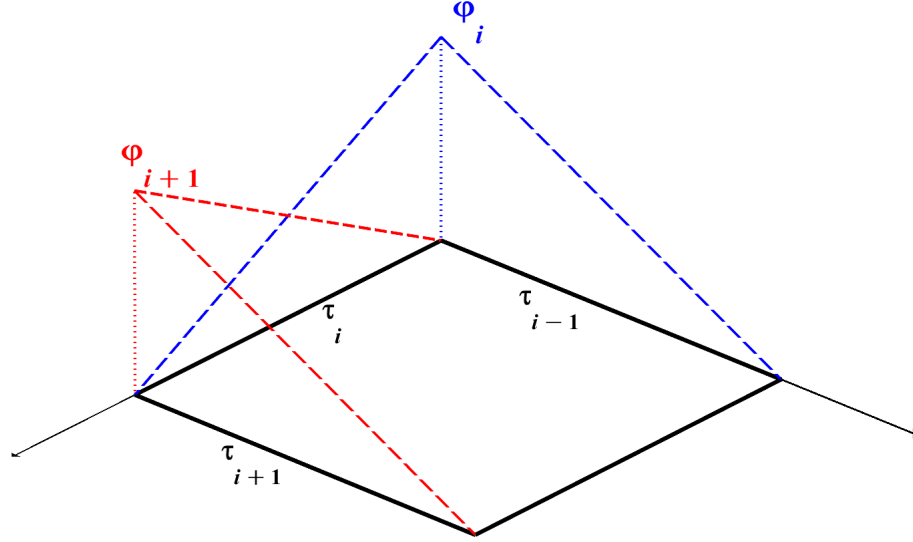
$$\psi_i(x) = \begin{cases} 1, & x \in \tau_i \\ 0, & \text{jinde.} \end{cases}$$

Navíc, představme si bázi  $W^N \subset H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$  po částech lineárních funkcí  $\varphi_i$  při parametrizaci segmentů  $\tau_{i-1} : x = x_1^{(i-1)} + s(x_2^{(i-1)} - x_1^{(i-1)})$ ,  $\tau_i : x = x_1^{(i)} + t(x_2^{(i)} - x_1^{(i)})$ ,  $s, t \in \langle 0, 1 \rangle$ :

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} s, & x \in \tau_{i-1} \\ 1 - t, & x \in \tau_i \\ 0, & \text{jinde.} \end{cases}$$

<sup>10</sup>Symbolem  $h$  rozumíme šířku příslušné diskretizační sítě.

**Poznámka 4.5** Všimněme si, že báze  $\{\varphi_1, \dots, \varphi_N\}$  je bází „hat“ funkcí, definovaných nad jednotlivými uzly  $x_1, \dots, x_N$ , jaké se běžně užívají v metodě konečných prvků.



Obrázek 3: Ilustrace bázových funkcí  $\varphi$

Pro výsledné prostory platí  $\dim V^N = \dim W^N = N$ . Dostáváme tak Galerkinovskou formulaci - hledáme  $t^N \in V^N$  takové, že

$$\left( \forall v^N \in V^N \right) \left( g^N \in W^N \right) : \left\langle v^N, V t^N \right\rangle = \left\langle v^N, \left( \frac{1}{2} I + K \right) g^N \right\rangle. \quad (4.18)$$

S přihlédnutím k faktu, že  $V^N \ni t^N(x) = \sum_{i=1}^N t_i \psi_i(x)$ ,  $W^N \ni g^N(x) = \sum_{j=1}^N g_j \varphi_j(x)$  a linearitě obou stran formulace (4.15) se dostáváme k řešení soustavy lineárních rovnic

$$\mathbb{V} \mathbf{t} = \left( \frac{1}{2} \mathbb{M} + \mathbb{K} \right) \mathbf{g}, \quad (4.19)$$

kde vektor  $\mathbf{g}$  získáme  $L^2$ -projekcí, tzn. řešením soustavy

$$\begin{bmatrix} (\varphi_1, \varphi_1)_{L^2(\Gamma)} & \dots & (\varphi_1, \varphi_N)_{L^2(\Gamma)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (\varphi_N, \varphi_1)_{L^2(\Gamma)} & \dots & (\varphi_N, \varphi_N)_{L^2(\Gamma)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\varphi_1, g)_{L^2(\Gamma)} \\ \vdots \\ (\varphi_N, g)_{L^2(\Gamma)} \end{bmatrix},$$



a uvedené matice mají následující podobu:

$$\mathbb{V}_{i,j} = \langle \psi_i, V\psi_j \rangle = -\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \psi_i(x) \int_{\Gamma} \psi_j(y) \ln \|x - y\| d\ell(y) d\ell(x), \quad (4.20)$$

$$\mathbb{M}_{i,j} = \langle \psi_i, \varphi_j \rangle = \int_{\Gamma} \psi_i(x) \varphi_j(x) d\ell(x), \quad (4.21)$$

$$\mathbb{K}_{i,j} = \langle \psi_i, K\varphi_j \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \psi_i(x) \int_{\Gamma} \varphi_j(y) \cdot \frac{(x-y) \cdot n(y)}{\|x-y\|^2} d\ell(y) d\ell(x). \quad (4.22)$$

„Galerkinovštější“ možností pro získání pravé strany soustavy 4.19, ve smyslu Céaova lemmatu (viz později Věta 4.2), je přímé sestavení vektoru. Místo, abychom se zabývali projekcí a sestavováním matic  $\mathbb{M}$  a  $\mathbb{K}$  lze rovnou řešit soustavu  $\mathbb{V}\mathbf{t} = \mathbf{k}$ , kde

$$\mathbf{k}_i = \left\langle \psi_i, \left( \frac{1}{2}I + K \right) g \right\rangle = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \psi_i(x) g(x) d\ell(x) + \int_{\Gamma} \psi_i(x) \int_{\Gamma} g(y) \cdot \frac{(x-y) \cdot n(y)}{\|x-y\|^2} d\ell(y) d\ell(x).$$

Tento přístup však skýtá dvě zásadní úskalí. Prvním může být obtížná či méně přesná numerická integrace členu, odpovídajícímu operátoru  $K$  přímo za použití funkce  $g$ . Druhým, výraznějším nedostatkem, je pak praktická nemožnost přístup zobecnit i pro jiné typy úloh. Proto se zaměříme právě na maticový přístup, pro nějž platí pravý opak.

Nyní pojďme k samotnému praktickému sestavení matic  $\mathbb{V}$ ,  $\mathbb{K}$  a  $\mathbb{M}$ . Vzhledem k definicím báзовých funkcí  $\psi$ , resp.  $\varphi$ , můžeme upravit vztahy (4.20), (4.22), (4.21) následovně:

$$\mathbb{V}_{i,j} = -\frac{1}{2\pi} \int_{\tau_i} \psi_i(x) \int_{\tau_j} \psi_j(y) \ln \|x - y\| d\ell(y) d\ell(x), \quad (4.23)$$

$$\mathbb{K}_{i,j} = \frac{1}{2\pi} \int_{\tau_i} \psi_i(x) \int_{\tau_{j-1} \cup \tau_j} \varphi_j(y) \cdot \frac{(x-y) \cdot n(y)}{\|x-y\|^2} d\ell(y) d\ell(x), \quad (4.24)$$

$$\mathbb{M}_{i,j} = \begin{cases} \int_{\tau_i} \psi_i(x) \varphi_j(x) d\ell(x), & x_j \in \tau_i \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases} \quad (4.25)$$

Jak již bylo nepřímě naznačeno při zavedení báзовých funkcí  $\varphi$ , uvedené integrály parametrizací  $\tau_i : x = x_1^{(i)} + t(x_2^{(i)} - x_1^{(i)})$ ,  $t \in (0, 1)$  převedeme na dvojné integrály, které budeme řešit metodami z Kapitoly 3. V případě prvků matic  $\mathbb{V}$ ,  $\mathbb{K}$  by však vzhledem k singularitám, které se v příslušných integrálech za určitých okolností objevují, bylo jejich přímé použití vysoce nepřesné, a tudíž nevyhnutelně vedlo k výrazně zkreslenému, neřkuli špatnému numerickému řešení. U matice  $\mathbb{M}$  je situace přece jen o poznání jednodušší:

### Příklad 7

Nechť  $\Omega = \left(0, \frac{1}{2}\right)^2 \subset \mathbb{R}^2$  a jednotlivými segmenty  $\tau_1, \dots, \tau_4$  jsou strany čtverce  $\Gamma$ , uvažované v pořadí proti směru hodinových ručiček, s tím, že  $\tau_1 = \left\langle 0, \frac{1}{2} \right\rangle \times \{0\}$ , a uzly diskretizace  $x_1, \dots, x_4$  jsou vrcholy tohoto čtverce ve stejném duchu s  $x_1 = [0, 0]^T$ . Již víme z (4.25), že nenulové prvky budou vždy právě dva v každém řádku matice. Navíc, geometricky vzato je s ohledem na podobu báзовých funkcí  $\psi, \varphi$  hodnota těchto dvou prvků pro každý segment stejná. Stačí tedy

spočítat prvky prvního řádku, ostatní řádky budou jen cyklicky posunuté o jednu pozici oproti předchozímu.

$$\begin{aligned}\tau_1 &= \left\langle 0, \frac{1}{2} \right\rangle \times \{0\}, \quad x_1^{(1)} = x_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x_2^{(1)} = x_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}, \\ \tau_1 : x &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \left( \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} t \\ 0 \end{bmatrix}, \quad t \in (0, 1), \quad d\ell(x) = \left\| \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} \right\| dt = \frac{1}{2} dt \\ \mathbb{M}_{1,1} &= \int_{\tau_1} 1 \cdot \varphi_1(x) d\ell(x) = \frac{1}{2} \int_0^1 1 \cdot (1-t) dt = \frac{1}{4}, \\ \mathbb{M}_{1,2} &= \int_{\tau_1} 1 \cdot \varphi_2(x) d\ell(x) = \frac{1}{2} \int_0^1 1 \cdot t dt = \frac{1}{4},\end{aligned}$$

takže s užitím předchozích úvah dostáváme výslednou matici

$$\mathbb{M} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

■

Na předchozím příkladu vidíme, že za užití předpokladu ekvidistantního<sup>11</sup> dělení hranice a vhodného indexování uzlů a segmentů máme jasně danou strukturu matice  $\mathbb{M}$  ve tvaru

$$\mathbb{M} = \frac{h}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.26)$$

Nyní zkoumejme poněkud složitější situaci s maticí  $\mathbb{V}$ . Úpravou integrálu (4.23) do již parame-  
trizované podoby dostaneme

$$\mathbb{V}_{i,j} = -\frac{|\tau_i| \cdot |\tau_j|}{2\pi} \int_0^1 \int_0^1 \ln \left\| x_1^{(i)} - x_1^{(j)} + s \left( x_2^{(i)} - x_1^{(i)} \right) - t \left( x_2^{(j)} - x_1^{(j)} \right) \right\| dt ds.$$

Je třeba rozlišit 3 situace:

---

<sup>11</sup>Tj.  $\forall i, j : |\tau_i| = |\tau_j| = h$ .

1.  $i = j$ :

V tomto případě vznikne integrál v podobě

$$\mathbb{V}_{i,i} = -\frac{|\tau_i|^2}{2\pi} \int_0^1 \int_0^1 \underbrace{\ln \left\| (s-t) \left( x_2^{(i)} - x_1^{(i)} \right) \right\|}_{=\ln |\tau_i| + \ln |s-t|} dt ds = -\frac{|\tau_i|^2}{2\pi} \left( \ln |\tau_i| + \int_0^1 \int_0^1 \ln |s-t| dt ds \right),$$

jenž má na první pohled singularitu  $s = t$ . Rozdělme tedy obor integrace na množiny  $T_1 = \{(s, t) \in \mathbb{R}^2 : s \in (0, 1), t \in (0, s)\}$  a  $T_2 = \{(s, t) \in \mathbb{R}^2 : s \in (0, 1), t \in (s, 1)\}$ . Jelikož funkce  $\ln |s - t|$  je právě kolem naší singularity symetrická, víme že integrály přes  $T_1$  a  $T_2$  se budou rovnat. Zbývá jeden z nich vyčíslit:

$$\int_0^1 \int_0^s \ln |s-t| dt ds = \int_0^1 \int_0^s \ln q dq ds = \int_0^1 s \cdot (\ln s - 1) ds = \lim_{a \rightarrow 0^+} \left[ \frac{1}{2} s^2 \ln s - \frac{3}{4} s^2 \right]_a^1 = -\frac{3}{4}.$$

Takže pro diagonální prvky matice  $\mathbb{V}$  platí

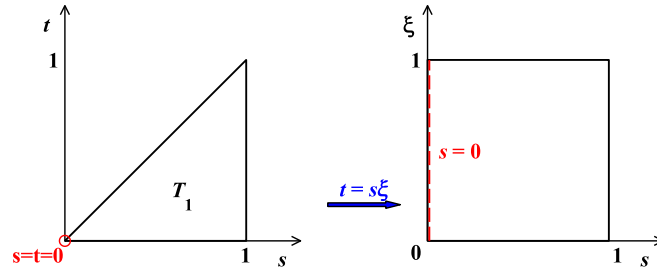
$$\mathbb{V}_{i,i} = -\frac{|\tau_i|^2}{2\pi} \left( \ln |\tau_i| - \frac{3}{2} \right).$$

2.  $\tau_i \cap \tau_j = \{x_c\}$ :

Slovy řečeno, bavíme se o sousedních segmentech. V takovémto případě, vezmeme-li jako počáteční bod obou segmentů jejich společný bod  $x_c$ , máme vztah

$$\mathbb{V}_{i,j} = -\frac{|\tau_i| \cdot |\tau_j|}{2\pi} \int_0^1 \int_0^1 \ln \left\| s \left( x_2^{(i)} - x_c \right) - t \left( x_2^{(j)} - x_c \right) \right\| dt ds,$$

se singularitou v bodě  $s = t = 0$ . Zde se vyplatí opět uvážit „trojúhelníky“  $T_1$  a  $T_2$  a tyto pak pomocí Duffyho substituce převést na referenční čtverce. Díky této úpravě budeme moct přes jednu z proměnných integrovat analyticky a zbylý integrál již nebude singulární.



Obrázek 4: Duffyho substituce

Konstantní člen  $-\frac{|\tau_i| \cdot |\tau_j|}{2\pi}$  pro přehlednost označme  $L$ :

$$\begin{aligned}
T_1 : & L \int_0^1 \int_0^s \ln \left\| s \begin{pmatrix} x_2^{(i)} \\ x_2^{(j)} \end{pmatrix} - x_c \right\| dt ds = \\
& = L \int_0^1 \int_0^1 s \ln \left\| s \begin{pmatrix} x_2^{(i)} \\ x_2^{(j)} \end{pmatrix} - s \xi \begin{pmatrix} x_2^{(i)} \\ x_2^{(j)} \end{pmatrix} \right\| d\xi ds, \\
T_2 : & L \int_0^1 \int_0^t \ln \left\| s \begin{pmatrix} x_2^{(i)} \\ x_2^{(j)} \end{pmatrix} - t \begin{pmatrix} x_2^{(i)} \\ x_2^{(j)} \end{pmatrix} \right\| ds dt = \\
& = L \int_0^1 \int_0^1 t \ln \left\| t \xi \begin{pmatrix} x_2^{(i)} \\ x_2^{(j)} \end{pmatrix} - t \begin{pmatrix} x_2^{(i)} \\ x_2^{(j)} \end{pmatrix} \right\| d\xi dt.
\end{aligned}$$

Formálním přeznačením  $t \sim s$  ve druhém integrálu a součtem vzniká

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}_{i,j} &= L \int_0^1 \int_0^1 s \left[ 2 \ln s + \ln \left\{ \left\| \begin{pmatrix} x_2^{(i)} \\ x_2^{(j)} \end{pmatrix} - \xi \begin{pmatrix} x_2^{(i)} \\ x_2^{(j)} \end{pmatrix} \right\| \left\| \xi \begin{pmatrix} x_2^{(i)} \\ x_2^{(j)} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_2^{(i)} \\ x_2^{(j)} \end{pmatrix} \right\| \right\} \right] d\xi ds \\
&= L \left( -1 + \int_0^1 \ln \left\{ \left\| \begin{pmatrix} x_2^{(i)} \\ x_2^{(j)} \end{pmatrix} - \xi \begin{pmatrix} x_2^{(i)} \\ x_2^{(j)} \end{pmatrix} \right\| \left\| \xi \begin{pmatrix} x_2^{(i)} \\ x_2^{(j)} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_2^{(i)} \\ x_2^{(j)} \end{pmatrix} \right\| \right\} d\xi \right).
\end{aligned}$$

Po této úpravě již integrál singularitu skutečně neobsahuje - aby tomu tak bylo, musely by se segmenty překrývat, což by bylo v rozporu už se samotnou definicí diskretizace, jak jsme si ji uvedli. Na tento člen tudíž lze bez obav užít Gaussovu-Legendreovu kvadraturu.

3. Pro případ  $\tau_i \cap \tau_j = \emptyset$  daný integrál není singulární a může být počítán přímo, opět např. pomocí Gaussovy-Legendreovy kvadratury.

Zbývá nám zkoumat situaci kolem matice  $\mathbb{K}$ . Hned úvodem poznamenejme jedno: Jelikož v případě matic  $\mathbb{M}$  a především  $\mathbb{V}$  se nabízí iterovat přes jednotlivé segmenty, je nanejvýš v zájmu efektivnější implementace při stejném procesu sestavovat i  $\mathbb{K}$ . Ačkoliv báze funkce  $\varphi$  jsou definovány nad uzly<sup>12</sup>, můžeme jejich části nad jednotlivými segmenty integrovat odděleně a příspěvky těchto větví pak načítat na příslušné indexy ve výsledné matici. Laicky řečeno bude mít matice  $\mathbb{K}$  strukturu „segmenty  $\times$  uzly“, iterováním přes segmenty budeme na sloupcové indexy, odpovídající jejich okrajovým bodům přičítat integrály, vyčíslené vzhledem k příslušné větvi odpovídající funkce. Označme  $\hat{\varphi}_1(t) = 1 - t$  a  $\hat{\varphi}_2(t) = t$ . Opět si obecně uveďme parametrizovaný integrál

---

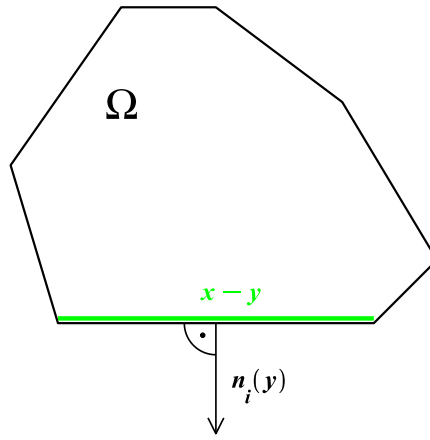
<sup>12</sup>Všimněme si, že formálně vzato je stejný problém i u matice  $\mathbb{M}$ , nicméně jej lze odstranit vhodným přístupem, jak jsme si ukázali dříve.

$$\mathbb{K}_{i,q}^{loc} = \frac{|\tau_i| \cdot |\tau_j|}{2\pi} \int_0^1 \int_0^1 \hat{\varphi}_q(t) \frac{\left( x_1^{(i)} - x_1^{(j)} + s \left( x_2^{(i)} - x_1^{(i)} \right) - t \left( x_2^{(j)} - x_1^{(j)} \right), n_j \right)}{\left\| x_1^{(i)} - x_1^{(j)} + s \left( x_2^{(i)} - x_1^{(i)} \right) - t \left( x_2^{(j)} - x_1^{(j)} \right) \right\|^2} dt ds,$$

kde je opět zapotřebí rozlišit 3 případy:

1.  $i = j$ :

V tomto případě nám stačí uvážit jedinou část vztahu (4.24), a to člen  $(x - y) \cdot n(y)$ . Tento totiž způsobí, že integrál bude automaticky nulový, neboť  $n(y)$  je jistě kolmá k  $x - y$ , viz Obrázek 5.



Obrázek 5: Znázornění situace v matici  $\mathbb{K}$  pro identické segmenty

Při iterování můžeme tudíž za situace  $i = j$  prohlásit aktuální příspěvek za nulový.

2.  $\tau_i \cap \tau_j = \{x_c\}$ :

Při této situaci užijeme podobného postupu jako u matice  $\mathbb{V}$ , tj. vzhledem k singularitě v počátku souřadného systému  $s, t$  užijeme Duffyho substituci<sup>13</sup>:

$$\begin{aligned} T_1 : L_2 \int_0^1 \int_0^s \hat{\varphi}_q(t) \frac{\left( s \left( x_2^{(i)} - x_c \right) - t \left( x_2^{(j)} - x_c \right), n_j \right)}{\left\| s \left( x_2^{(i)} - x_c \right) - t \left( x_2^{(j)} - x_c \right) \right\|^2} dt ds = \\ = L_2 \int_0^1 \int_0^1 s \hat{\varphi}_q(s\xi) \frac{\left( s \left( x_2^{(i)} - x_c \right) - s\xi \left( x_2^{(j)} - x_c \right), n_j \right)}{\left\| s \left( x_2^{(i)} - x_c \right) - s\xi \left( x_2^{(j)} - x_c \right) \right\|^2} d\xi ds = \\ = L_2 \int_0^1 \int_0^1 \hat{\varphi}_q(s\xi) \frac{\left( \left( x_2^{(i)} - x_c \right) - \xi \left( x_2^{(j)} - x_c \right), n_j \right)}{\left\| \left( x_2^{(i)} - x_c \right) - \xi \left( x_2^{(j)} - x_c \right) \right\|^2} d\xi ds, \end{aligned}$$

---

<sup>13</sup>  $L_2 = \frac{|\tau_i| \cdot |\tau_j|}{2\pi}$

$$\begin{aligned}
T_2 : L_2 \int_0^1 \int_0^t \hat{\varphi}_q(t) \frac{\left( s \left( x_2^{(i)} - x_c \right) - t \left( x_2^{(j)} - x_c \right), n_j \right)}{\left\| s \left( x_2^{(i)} - x_c \right) - t \left( x_2^{(j)} - x_c \right) \right\|^2} ds dt = \\
= L_2 \int_0^1 \int_0^1 t \hat{\varphi}_q(t) \frac{\left( t \xi \left( x_2^{(i)} - x_c \right) - t \left( x_2^{(j)} - x_c \right), n_j \right)}{\left\| t \xi \left( x_2^{(i)} - x_c \right) - t \left( x_2^{(j)} - x_c \right) \right\|^2} d\xi dt = \\
= L_2 \int_0^1 \int_0^1 \hat{\varphi}_q(t) \frac{\left( \xi \left( x_2^{(i)} - x_c \right) - \left( x_2^{(j)} - x_c \right), n_j \right)}{\left\| \xi \left( x_2^{(i)} - x_c \right) - \left( x_2^{(j)} - x_c \right) \right\|^2} d\xi dt.
\end{aligned}$$

A znova, přeznačením, součtem obou integrálů a integrací přes proměnnou  $s$  máme výslednou formuli

$$\mathbb{K}_{i,q}^{loc} = L_2 \int_0^1 \left( \hat{\varphi}_q \left( \frac{\xi}{2} \right) \frac{\left( x_2^{(i)} - x_c \right) - \xi \left( x_2^{(j)} - x_c \right)}{\left\| \left( x_2^{(i)} - x_c \right) - \xi \left( x_2^{(j)} - x_c \right) \right\|^2} + \frac{\xi \left( x_2^{(i)} - x_c \right) - \left( x_2^{(j)} - x_c \right)}{2 \left\| \xi \left( x_2^{(i)} - x_c \right) - \left( x_2^{(j)} - x_c \right) \right\|^2}, n_j \right) d\xi.$$

3.  $\tau_i \cap \tau_j = \emptyset$  je i v tomto případě bez problému.

Jelikož operátor  $V$  je spojitý, symetrický a eliptický, matice  $\mathbb{V}$  v soustavě (4.19) je symetrická a pozitivně definitní. Pro rozsáhlejší úlohy tak k jejímu řešení lze použít například metodu sdružených gradientů (CG).<sup>14</sup>

### 4.3 Konvergence BEM

Jelikož numerické řešení je pouze aproximací, nabízí se otázka, jaké chyby se dopouštíme. Jako prvotní odhad nám může posloužit známý výsledek numerické analýzy.

**Věta 4.2 (Céaovo lemma)** *Nechť  $H$  je Hilbertův prostor,  $a : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$  je omezená,  $H$ -eliptická bilineární forma,  $a, b \in H^*$ . Dále nechť  $t$  je slabým řešením úlohy*

$$\forall v \in H : a(t, v) = b(v),$$

*$H^N$  je konečně-dimenzionální podprostor  $H$  a  $t^N \in H^N$  je řešením úlohy*

$$\forall v^N \in H^N : a(t^N, v^N) = b(v^N).$$

*Pak platí*

$$\left\| t - t^N \right\|_H \leq \frac{c_1}{c_2} \min_{w^N \in H^N} \left\| t - w^N \right\|_H,$$

---

<sup>14</sup>Pro další informace o CG a dalších vybraných iteračních řešicích lze nahlédnout např. do publikace [8].

kde  $c_1$  je konstanta omezenosti a  $c_2$  konstanta elipticity formy  $a$ .

**Důkaz.** Nejprve ukážeme vlastnost, které se říká Galerkinovská ortogonalita. Ta plyne přímo z faktu, že  $t^N, t$  jsou slabými řešeními, a je bilineární a  $H^N$  je podprostorem  $H$ :

$$\forall w^N \in H^N : a(t - t^N, w^N) = a(t, \underbrace{w^N}_{\in H}) - a(t^N, w^N) = b(w^N) - b(w^N) = 0.$$

S využitím tohoto poznatku, omezenosti a elipticity formy  $a$  pak rychle dostáváme dokazované tvrzení. Vezměme tedy libovolné  $w^N, v^N \in H^N$  takové, že  $t^N = w^N - v^N$ :

$$\begin{aligned} \|t - t^N\|_H^2 &\leq c_2^{-1} a(t - t^N, t - t^N) = c_2^{-1} \left( a(t - t^N, t - t^N) - \underbrace{a(t - t^N, v^N)}_{=0} \right) = \\ &= c_2^{-1} a(t - t^N, t - \underbrace{t^N - v^N}_{=-w^N}) \leq \frac{c_1}{c_2} \|t - t^N\|_H \|t - w^N\|_H, \end{aligned}$$

a zkrácením  $\|t - t^N\|_H$  dostáváme výsledek. ■

Všimněme si, že v případě, že je forma  $a$  skalárním součinem, dostáváme silnější odhad<sup>15</sup>

$$\|t - t^N\|_H \leq \min_{w^N \in H^N} \|t - w^N\|_H.$$

**Poznámka 4.6** Dá se ukázat, že řešení diskretizované úlohy je tzv. Galerkinovskou projekcí skutečného řešení  $t$  na podprostor  $H^N$ , tj.  $\mathcal{G}_N : H \rightarrow H^N$ ,  $\mathcal{G}_N t = t^N$ . Takto definované zobrazení  $\mathcal{G}_N$  je navíc spojitě a lineární. Spojením této skutečnosti a Věty 4.2 dostáváme, že pro  $N \rightarrow \infty$ , a při ekvidistantní, nebo přinejmenším kvazi-uniformní diskretizaci a  $h \rightarrow 0^+$  platí  $t^N \rightarrow t$ . I z tohoto důvodu se někdy klasické metodě hraničních prvků říká také  $h$ -BEM.

Krom faktu, že metoda při zvyšování dimenze testovacího podprostoru konverguje ke skutečnému řešení, by nás však mohlo zajímat také to, jak rychle metoda konverguje. Na tuto otázku dávají odpověď následující dvě Věty (viz [14, 15]):

**Věta 4.3** *Nechť  $\Omega \in \mathcal{L}$  je oblast s polygonální hranicí  $\Gamma$ ,  $\mathcal{T} = \{\tau_1, \dots, \tau_N\}$  je kvazi-uniformní diskretizace  $\Gamma$  a  $V^N$  je konečně-dimenzionální podprostor  $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ . Dále nechť  $t \in H^s(\Gamma)$  a pro všechna  $i \in \{1, \dots, N\}$  platí  $t|_{\tau_i} \in H^s(\tau_i)$ , pro  $s \in \langle 0, 1 \rangle$ . Pak*

$$\min_{w^N \in V^N} \|t - w^N\|_{L^2(\Gamma)} \leq Ch^s |t|_{H^1(\Gamma)},$$

kde  $C \in \mathbb{R}^+$  a  $h$  je parametr dělení diskretizace  $\mathcal{T}$ .

---

<sup>15</sup>Skalární součin má z Cauchy-Schwarz-Buňakovského nerovnosti konstantu omezenosti rovnu 1, konstantu elipticity z definice taktéž  $((v, v)_H = \|v\|_H^2)$ .

**Věta 4.4** *Nechť  $\Omega \in \mathcal{L}$  je polygonální oblast,  $t \in H^s(\Gamma)$ ,  $s \in \langle 0, 1 \rangle$  je řešením úlohy (4.15), a  $t^N \in V^N \subset H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$  je řešením (4.18). Pak platí následující odhad:*

$$\left\| t - t^N \right\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)} \leq Ch^{\frac{1}{2}+s} \|t\|_{H^s(\Gamma)}.$$

Jak vidíme, odhady závisí na tzv. regularitě řešení  $t$ , to jest na hodnotě  $s$ . Tento aspekt bude ještě výraznější u metody vyššího řádu, pro niž platí podobný, obecnější odhad, jak si v příští kapitole uvedeme. Tyto odhady platí analogicky i ve 3D, je však třeba více dbát na způsob diskretizace.



## 5 Hraniční prvky vyšších řádů

V minulé kapitole jsme se seznámili s klasickou BEM, kde jsme jakožto bázi pro přibližné řešení Dirichletovy úlohy pro Laplaceovu rovnici brali po částech konstantní bázové funkce s nosiči na jednotlivých segmentech, respektive po částech lineární funkce s nosičem na dvojici sousedních segmentů pro aproximaci okrajové podmínky a operátorů identity a dvojvrstvy. S přihlédnutím k faktu, že numericky nalezené řešení je Galerkinovskou projekcí skutečného řešení na použitou bázi, nabízí se myšlenka, vedoucí k možnému zlepšení - vzít báze obecně polynomiální, tedy s polynomy vyšších řádů. Odtud také název této varianty metody.

Záleží však, jakou konkrétní polynomiální bázi zvolit. Jednou z možností by bylo prosté užití monomiálů nad daným segmentem. Nicméně, tak jako v Kapitole 3, ani tady se nejedná o nejšťastnější řešení. Přestože úpravy, jaké jsme provedli u matic v předchozí kapitole, budeme tak či tak muset do jisté míry modifikovat, ukazuje se výhodnějším použití Legendreových polynomů, což záhy uvidíme.

V každém případě zavedeme nové podprostory  $V^{N,p}, W^{N,p} \subset H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ , kde  $p$  značí nejvyšší stupeň polynomu nad jednotlivými segmenty, a místo (4.18) budeme řešit modifikovanou úlohu

$$(\forall v^{N,p} \in V^{N,p})(g^{N,p} \in W^{N,p}) : \langle v^{N,p}, Vt^{N,p} \rangle = \left\langle v^{N,p}, \left( \frac{1}{2}I + K \right) g^{N,p} \right\rangle. \quad (5.1)$$

**Poznámka 5.1** Tak jako se občas klasická metoda hraničních prvků, s přesností opírající se o počet segmentů, občas označuje  $h$ -BEM, varianta, těžící z vyššího řádu báze se s ohledem na označení naopak označuje  $p$ -BEM.

### 5.1 Konstrukce matic

Podobně jako v předchozí kapitole se podívejme na sestavování matic, odpovídajících příslušným operátorům. Vzhledem k tomu, že v této práci budeme i nadále chtít iterovat přes jednotlivé segmenty, je na snadě otázka, jakým způsobem uspořádat maticovou strukturu a jakou konkrétní bázi budeme používat.

#### 5.1.1 Použité báze a struktura matic

Jak již bylo naznačeno, jakožto bázi  $\psi$  budeme používat Legendreovy polynomy  $L_k$ , zkonstruované nad jednotlivými segmenty. Pro projekční bázi  $\varphi$  pak užijeme hierarchickou výstavbu,

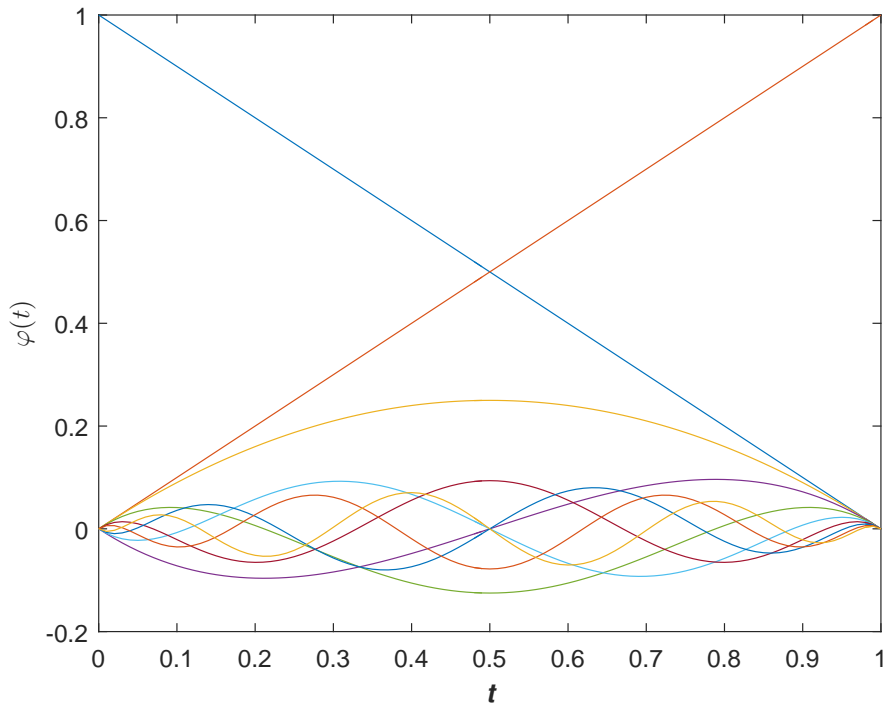
vycházející z původních uzlových funkcí a Legendreových polynomů<sup>16</sup>:

$$\begin{aligned} \psi_k^{(i)}(x) &= \chi_{\tau_i}(x) L_k(x), \\ \varphi_0^{(i)}(t) &= \chi_{\tau_i}(x) \varphi_i(t), \\ \varphi_1^{(i)}(t) &= \chi_{\tau_i}(x) \varphi_{i+1}(t), \\ \varphi_k^{(i)}(t) &= \varphi_i(t) \varphi_{i+1}(t) L_{k-2}(2t-1), \quad k \geq 2, \end{aligned}$$

kde

$$\chi_{\tau_i}(x) = \begin{cases} 1, & x \in \tau_i \\ 0, & \text{jinde} \end{cases}$$

je charakteristická funkce segmentu  $\tau_i$ . Funkcím projekční báze vyšších řádů se občas říká „bubble“ funkce. Opět u této báze lze pozorovat jistou analogii k FEM, v tomto případě k FEM vyšších řádů.



Obrázek 6: Hierarchická báze  $\varphi_0^{(i)} \dots, \varphi_9^{(i)}$

Označme  $P_i$  jako nejvyšší stupeň polynomu na  $\tau_i$ . V této práci je použito následující schéma matic:

<sup>16</sup>Při zápisu báze  $\varphi$  uvažujeme parametrizaci  $\tau_i : x = x_1^{(i)} + t(x_2^{(i)} - x_1^{(i)})$ ,  $t \in \langle 0, 1 \rangle$ .

$$\mathbb{V} = \begin{bmatrix} \mathbb{V}^{(1,1)} & \dots & \mathbb{V}^{(1,N)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbb{V}^{(N,1)} & \dots & \mathbb{V}^{(N,N)} \end{bmatrix}, \quad \mathbb{V}^{(i,j)} = \begin{bmatrix} \langle \psi_1^{(i)}, V\psi_1^{(j)} \rangle & \dots & \langle \psi_1^{(i)}, V\psi_{P_j}^{(j)} \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \psi_{P_i}^{(i)}, V\psi_1^{(j)} \rangle & \dots & \langle \psi_{P_i}^{(i)}, V\psi_{P_j}^{(j)} \rangle \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

$$\mathbb{K} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbb{K}^{(1,u)} \\ \vdots \\ \mathbb{K}^{(N,u)} \end{bmatrix}}_{\text{Uzlové funkce}} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbb{K}^{(1,1,b)} & \dots & \mathbb{K}^{(1,N,b)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbb{K}^{(N,1,b)} & \dots & \mathbb{K}^{(N,N,b)} \end{bmatrix}}_{\text{„Bubbly“}}, \quad \mathbb{M} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbb{M}^{(1,u)} \\ \vdots \\ \mathbb{M}^{(N,u)} \end{bmatrix}}_{\text{Uzlové funkce}} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbb{M}^{(1,1,b)} & & \mathbf{O} \\ & \ddots & \\ \mathbf{O} & & \mathbb{M}^{(N,N,b)} \end{bmatrix}}_{\text{„Bubbly“}}, \quad (5.3)$$

$$\mathbb{K}^{(i,u)} = \begin{bmatrix} \langle \psi_1^{(i)}, K\varphi_1 \rangle & \dots & \langle \psi_1^{(i)}, K\varphi_N \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \psi_{P_i}^{(i)}, K\varphi_1 \rangle & \dots & \langle \psi_{P_i}^{(i)}, K\varphi_N \rangle \end{bmatrix}, \quad \mathbb{K}^{(i,j,b)} = \begin{bmatrix} \langle \psi_1^{(i)}, K\varphi_2^{(j)} \rangle & \dots & \langle \psi_1^{(i)}, K\varphi_{P_j}^{(j)} \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \psi_{P_i}^{(i)}, K\varphi_2^{(j)} \rangle & \dots & \langle \psi_{P_i}^{(i)}, K\varphi_{P_j}^{(j)} \rangle \end{bmatrix}. \quad (5.4)$$

Pro bloky matice  $\mathbb{M}$  je stavba analogická k matici  $\mathbb{K}$ . Jak záhy uvidíme, „nejzajímavější“ úpravy budeme provádět pro diagonální bloky matice  $\mathbb{V}$ .

### 5.1.2 Identické segmenty matice $\mathbb{V}$

Obecně je, jak již víme, každý prvek matice jednovrstvy dán vztahem

$$\mathbb{V}_{k,l}^{(i,j)} = \int_{\tau_i} \psi_k(x) \int_{\tau_j} \psi_l(y) G(x,y) d\ell(x) d\ell(y),$$

kde  $i, j$  budou ve výsledku indexy segmentů (bloků) a  $k, l$  jsou řády polynomů (indexy v rámci bloku).

**Poznámka 5.2** Jak jsme si uvedli, jako báze funkce  $\psi$  budeme používat Legendreovy polynomy nad jednotlivými segmenty. Ačkoliv se formálně vzato jedná o jiné funkce, než o Legendreovy polynomy na intervalu  $\langle 0, 1 \rangle$ , jež budeme používat při výpočtech, dohodněme se, že i tyto „referenční“ funkce budeme pro jednoduchost značit  $\psi$ .

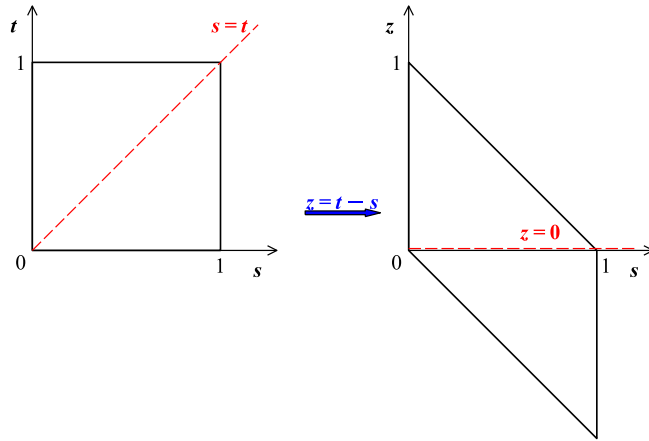
$$\begin{aligned}
x &= x_1^{(i)} + s \left( x_2^{(i)} - x_1^{(i)} \right), \quad d\ell(x) = |\tau_i| ds, \\
y &= x_1^{(i)} + t \left( x_2^{(i)} - x_1^{(i)} \right), \quad d\ell(y) = |\tau_i| dt, \quad s, t \in \langle 0, 1 \rangle \\
\mathbb{V}_{k,l}^{(i,i)} &= -\frac{|\tau_i|^2}{2\pi} \int_0^1 \psi_k(2s-1) \int_0^1 \psi_l(2t-1) \ln \|(s-t)(B-A)\| dt ds = \\
&= -\frac{|\tau_i|^2}{2\pi} \int_0^1 \psi_k(2s-1) \int_0^1 \psi_l(2t-1) (\ln |\tau_i| + \ln |s-t|) dt ds = \\
&= -\frac{|\tau_i|^2 \ln |\tau_i|}{2\pi} \int_0^1 \psi_k(2s-1) \int_0^1 \psi_l(2t-1) dt ds - \frac{|\tau_i|^2}{2\pi} \int_0^1 \psi_k(2s-1) \int_0^1 \psi_l(2t-1) \ln |s-t| dt ds,
\end{aligned}$$

přičemž pro první sčítanec díky ortogonalitě Legendreových polynomů<sup>17</sup> platí

$$\int_0^1 \psi_k(2s-1) \int_0^1 \psi_l(2t-1) dt ds = \begin{cases} 1, & k = l = 0 \\ 0, & \text{jinak} \end{cases},$$

zatímco druhý sčítanec budeme dále upravovat. Singularitu  $s = t$  převedeme substitucí  $z = t - s$  na  $z = 0$ :

$$-\frac{|\tau_i|^2}{2\pi} \int_0^1 \psi_k(2s-1) \int_0^1 \psi_l(2t-1) \ln |s-t| dt ds = -\frac{|\tau_i|^2}{2\pi} \int_0^1 \psi_k(2s-1) \int_{-s}^{1-s} \psi_l(2z+2s-1) \ln |z| dz ds.$$



Obrázek 7: Ilustrace použité substituce

Na oba vzniknuvší trojúhelníky aplikujeme Duffyho substituci<sup>18</sup>, součtem obou výsledků vzniká

<sup>17</sup>Připomeňme, že  $\psi_0(x) = 1$

<sup>18</sup>Pro  $z \in (-s, 0)$  substituujeme  $z = -s\xi$ , pro  $z \in (0, 1-s)$  zase  $z = (1-s)\xi$ .

$$\begin{aligned}
& -\frac{|\tau_i|^2}{2\pi} \left( \int_0^1 \psi_k(2s-1) \int_0^1 (1-s)\psi_l(2(1-s)\xi+2s-1) \ln[(1-s)\xi] d\xi ds + \right. \\
& \left. + \int_0^1 \psi_k(2s-1) \int_0^1 s\psi_l(-2s\xi+2s-1) \ln(s\xi) d\xi ds \right) \stackrel{\text{ozn.}}{=} I_{k,l} + J_{k,l}.
\end{aligned}$$

Všimněme si, že pokud v prvním sčítanci provedeme substituci  $\eta = 1 - s$  a uplatníme vlastnost Legendreových polynomů (viz Příklad 2), máme

$$I_{k,l} = -\frac{|\tau_i|^2}{2\pi} \int_0^1 \underbrace{\psi_k(1-2\eta)}_{=(-1)^k \psi_k(2\eta-1)} \int_0^1 \eta \underbrace{\psi_l(2\eta\xi+1-2\eta) \ln(\eta\xi)}_{=(-1)^l \psi_l(-2\eta\xi+2\eta-1)} d\xi d\eta = (-1)^{k+l} J_{k,l}.$$

Integrály  $I_{k,l}$  lze díky rozložení logaritmu  $\ln(\eta\xi)$  počítat pomocí Gauss-log kvadratury přes obě proměnné. S přihlédnutím k faktu, že  $I_{0,0} = \frac{3|S_i|^2}{8\pi}$ , můžeme předešlá zjištění shrnout do vztahu

$$\mathbb{V}_{k,l}^{(i,i)} = \begin{cases} -\frac{|\tau_i|^2}{2\pi} \left( \ln |\tau_i| - \frac{3}{2} \right), & k = l = 0 \\ 2I_{k,l}, & k + l \equiv 0 \pmod{2} \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases} \quad (5.5)$$

### 5.1.3 Sousední a disjunktní segmenty matice $\mathbb{V}$

V tomto případě použijeme prakticky totožnou úpravu, jako v klasickém BEM, včetně užití společného bodu obou segmentů jako výchozího. Nicméně zde nebude prostor pro přímou integraci přes jednu z proměnných, což nám však nemusí vadit - singularita, která vznikne bude dána logaritmem, tudíž budeme opět moct efektivně užít Gauss-log kvadraturu:

$$\begin{aligned}
& x = x_1^{(i)} + s \left( x_2^{(i)} - x_1^{(i)} \right), \quad d\ell(x) = |\tau_i| ds, \\
& y = x_1^{(i)} + t \left( x_2^{(j)} - x_1^{(i)} \right), \quad d\ell(y) = |\tau_j| dt, \quad s, t \in \langle 0, 1 \rangle \\
& \mathbb{V}_{k,l}^{(i,j)} = -\frac{|\tau_i||\tau_j|}{2\pi} \int_0^1 \psi_k(2s-1) \int_0^1 \psi_l(2t-1) \ln \left\| s \left( x_2^{(i)} - x_1^{(i)} \right) - t \left( x_2^{(j)} - x_1^{(i)} \right) \right\| dt ds \\
& t \in \langle 0, s \rangle : -\frac{|\tau_i||\tau_j|}{2\pi} \int_0^1 \psi_k(2s-1) \int_0^s \psi_l(2t-1) \ln \left\| s \left( x_2^{(i)} - x_1^{(i)} \right) - t \left( x_2^{(j)} - x_1^{(i)} \right) \right\| dt ds = \\
& = -\frac{|\tau_i||\tau_j|}{2\pi} \int_0^1 \psi_k(2s-1) \int_0^1 s\psi_l(2s\xi-1) \ln \left\| s \left( x_2^{(i)} - x_1^{(i)} \right) - s\xi \left( x_2^{(j)} - x_1^{(i)} \right) \right\| d\xi ds =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{|\tau_i||\tau_j|}{2\pi} \int_0^1 \psi_k(2s-1) \int_0^1 s\psi_l(2s\xi-1) \left( \ln s + \ln \left\| \left( x_2^{(i)} - x_1^{(i)} \right) - \xi \left( x_2^{(j)} - x_1^{(i)} \right) \right\| \right) d\xi ds \stackrel{\text{ozn.}}{=} I_1, \\
&t \in \langle s, 1 \rangle : -\frac{|\tau_i||\tau_j|}{2\pi} \int_0^1 \psi_l(2s-1) \int_0^s \psi_k(2t-1) \ln \left\| t \left( x_2^{(i)} - x_1^{(i)} \right) - s \left( x_2^{(j)} - x_1^{(i)} \right) \right\| dt ds = \\
&= -\frac{|\tau_i||\tau_j|}{2\pi} \int_0^1 \psi_l(2s-1) \int_0^1 s\psi_k(2s\xi-1) \ln \left\| s\xi \left( x_2^{(i)} - x_1^{(i)} \right) - s \left( x_2^{(j)} - x_1^{(i)} \right) \right\| d\xi ds = \\
&= -\frac{|\tau_i||\tau_j|}{2\pi} \int_0^1 \psi_l(2s-1) \int_0^1 s\psi_k(2s\xi-1) \left( \ln s + \ln \left\| \xi \left( x_2^{(i)} - x_1^{(i)} \right) - \left( x_2^{(j)} - x_1^{(i)} \right) \right\| \right) d\xi ds \stackrel{\text{ozn.}}{=} I_2,
\end{aligned}$$

takže

$$\mathbb{V}_{k,l}^{(i,j)} = I_1 + I_2. \quad (5.6)$$

Všimněme si, že ač se se singularitou vypořádáme, v proměnné  $\xi$  tentokrát, vzhledem ke tvaru integrandů, nebude účelné použít Gauss-log kvadraturu, kterou tak aplikujeme pouze pro integraci vzhledem k proměnné  $s$ .

**Poznámka 5.3** U bazových funkcí vyššího řádu je třeba dávat si dobrý pozor na jednu věc: Pokud procházíme segmenty a u sousedních obrátíme jejich orientaci tak, aby začínaly ve společném bodě, obrátíme tím i paritu bazových funkcí lichého stupně (nezapomeňme, že Legendreovy polynomy jsou na daném intervalu (anti)symetrické kolem jeho středu). Obrácená orientace tak díky antisymetrii v jistém smyslu „obráť znaménko“ bazové funkce. Je proto třeba při samotné implementaci pohlídat, kdy dojde k případnému otočení na daném segmentu. V takovém případě stačí otočit znaménko vyčísleného integrálu.

Pro disjunktní segmenty opět platí, že je můžeme integrovat přímo. Nicméně obsah logaritmu v jejich případě žádnou rozumnou substitucí nelze upravit tak, abychom v jedné z proměnných dostali možnost použít Gauss-log kvadraturu. Na druhou stranu u nich nemůže nastat situace s otáčením znaménka. A vzhledem k absenci singularity můžeme dostat poměrně dobré výsledky i Gaussovou-Legendreovou kvadraturou.

#### 5.1.4 Matice $\mathbb{K}$ a $\mathbb{M}$

U těchto matic máme strukturu lehce odlišnou oproti předchozímu případu. Nejrychleji budeme hotovi s diagonálními bloky  $\mathbb{K}^{(i,i,b)}$ . Vzhledem k definici hierarchické báze a stejné situaci jaká nastala u  $h$ -BEM (viz Obrázek 5) máme okamžitě

$$\mathbb{K}^{(i,i,b)} = \mathbf{O}.$$

Co se ostatních bloků matice  $\mathbb{K}$  týče, nebudeme je sestavovat explicitně, ale za použití lokálních příspěvků, a tedy analogických úprav, jako u  $h$ -BEM. Nicméně s ohledem na přítomnost funkcí

vyšších řádů nebudeme analyticky integrovat přes jednu z proměnných, nýbrž použijeme na obě Gaussovu-Legendreovu kvadraturu.

Pro správné umístění ve výsledné matici použijeme rozšíření nápadu z předchozí kapitoly. První dva sloupcové indexy v globální matici budou indexy příslušných krajních uzlů segmentu, ty zbylé pak budou číslovány  $N+1, \dots, N+P_1-1, N+P_1, \dots, N+P_1+P_2-2, \dots, \sum_{i=1}^N P_i$ , čili postupně po segmentech a řádech, podobně jako u matice  $\mathbb{V}$ . A stejně tak, i zde platí, že případná záměna orientace segmentu při integraci otočí znaménko u prvků, odpovídajících polynomům lichého řádu, což může být ošetřeno stejným způsobem jako dříve.

Pro matici identity bude platit obdobný postup jako u matice dvojvrstvy, s tím rozdílem, že naopak jedině integrace přes identické segmenty bude nenulová. Tím odpadá i starost o otáčení znaménka na blocích sousedních segmentů.

## 5.2 Konvergence $p$ -BEM

Nyní si uveďme odhady chyb pro metodu vyššího řádu. Vyjma základních odhadů (viz Věta 4.2, Poznámka 4.6) platí silnější tvrzení, jak jsme si uvedli v Oddíle 4.3. Označme  $p$  jako nejvyšší (jednotný) řád báзовých funkcí nad jednotlivými segmenty.

**Věta 5.1** *Nechť  $\Omega \in \mathcal{L}$  je oblast s polygonální hranicí  $\Gamma$ ,  $\mathcal{T} = \{\tau_1, \dots, \tau_N\}$  je kvazi-uniformní diskretizace  $\Gamma$  a  $V^{N,p}$  je konečně-dimenzionální podprostor  $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ . Dále nechť  $t \in H^1(\Gamma)$  a pro všechna  $i \in \{1, \dots, N\}$  platí  $t|_{\tau_i} \in H^1(\tau_i)$ . Pak existuje projekční operátor  $\mathcal{G}_{N,p} : H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \rightarrow V^{N,p}$  takový, že*

$$\|t - \mathcal{G}_{N,p}t\|_{L^2(\Gamma)} \leq Ch^{\min\{s,p+1\}} \|t\|_{H^s(\Gamma)}.$$

Projekci z předchozí Věty můžeme do jisté míry ztotožnit s Galerkinovskou projekcí. Navíc, existuje odhad chyby také v  $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$  normě:

**Věta 5.2** *Nechť  $\Omega \in \mathcal{L}$  je polygonální oblast,  $t \in H^s(\Gamma)$ ,  $s \geq 0$  je řešením úlohy (4.15), a  $t^{N,p} \in V^{N,p} \subset H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$  je řešením (5.1). Pak platí následující odhad:*

$$\|t - t^{N,p}\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)} \leq Ch^{\frac{1}{2} + \min\{s,p+1\}} \|t\|_{H^s(\Gamma)}.$$

Z Věty 5.2 můžeme vidět, že čím vyšší je regularita řešení a řád báze, tím rychlejší konvergenci máme. Pro dostatečně hladké řešení, jinými slovy s dostatečně velké (popř.  $s = \infty$ ) máme odhad určen přímo řádem báze:

$$\|t - t^{N,p}\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)} \leq Ch^{\frac{3}{2}+p} \|t\|_{H^s(\Gamma)}. \quad (5.7)$$

Podobný „obrat“ lze použít i pro Větu 5.1.

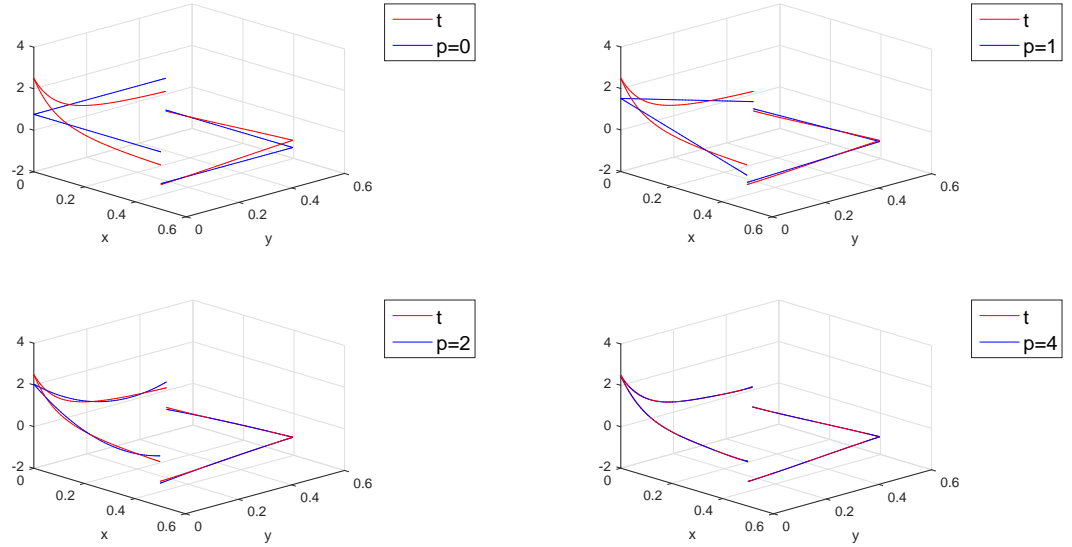
Nyní máme v ruce všechny „karty“, nezbytné pro vhodné posouzení numerického experimentu. Uvažme funkci  $\tilde{u}(x) = -\frac{1}{2} \ln \left\| x + \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\|$ , která je harmonická na  $\Omega = \left(0, \frac{1}{2}\right)^2$ . Dostáváme

testovací úlohu

$$\begin{cases} -\Delta u = 0, & x \in \Omega \\ \gamma_D u = g, & x \in \Gamma, \end{cases} \quad g(x) = \tilde{u}|_{\Gamma}(x). \quad (5.8)$$

Je snadným cvičením, že funkce  $g$  má na hranici nekonečnou regularitu, tedy platí  $s = \infty$ . Můžeme tedy, s ohledem na (5.2), očekávat exponenciální konvergenci  $p$ -BEM. Použitý algoritmus (viz Příloha A) čerpá ze struktury matic a technik vyčíslení příslušných integrálů, jež jsme uvedli v této kapitole.

Před samotným měřením chyby je však vhodné se přesvědčit, zda je řešení, nalezené pomocí našeho provedení  $p$ -BEM, skutečně odpovídající projekci řešení na adekvátní bázi, tak jak je uvedeno v Poznámce 4.6. Poznamenejme, že úlohu budeme řešit pouze na minimálním počtu segmentů, tj. čtyřech stranách čtverce, a budeme zvyšovat jen řád báze, bez snižování hodnoty  $h$ .



Obrázek 8: Ukázka projekce řešení na báze různých řádů

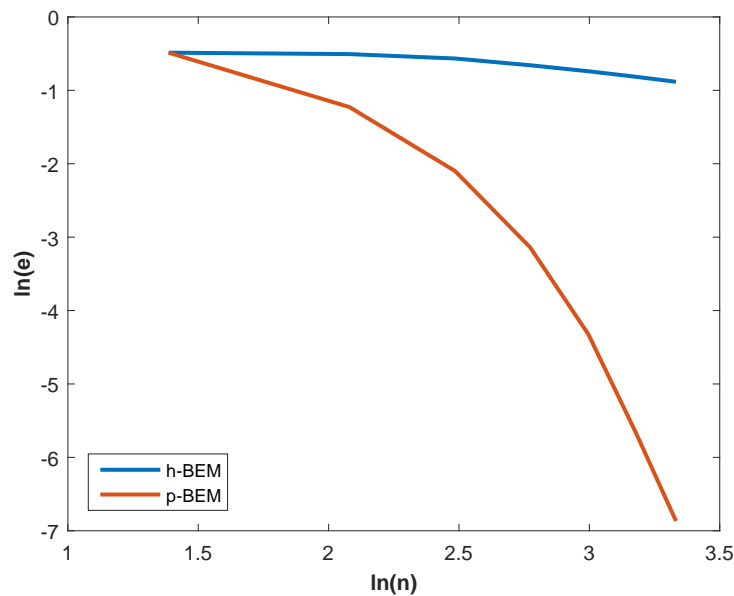
Na Obrázku 8 lze vskutku pozorovat trend lepší aproximace se zvyšujícím se  $p$ . Na první pohled u  $p = 0$  (a při bližším pohledu i  $p = 1$  a  $p = 2$ ) není tato projekce zcela nejbliž ve smyslu  $L^2(\Gamma)$  normy. To je však dáno prostým faktem - Naše báze aproximuje nikoliv prostor  $L^2(\Gamma)$ , nýbrž  $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ . Projekce na tento prostor je v určitém smyslu „slabší“, jinak řečeno, pro menší dimenzi báze nepozorujeme natolik přímočaré přiblížení v duchu metody nejmenších čtverců, jaké bychom pozorovali u čisté  $L^2$ -projekce.

Zbývá nám pozorovat vývoj chyby  $p$ -BEM versus  $h$ -BEM. Menší obstrukce nám může postavit do cesty rozhodování, dle jakého kritéria obě metody srovnat. V této práci se podíváme na



srovnání chyby při stejné dimenzi produkovaných soustav, neb tato především určuje výpočetní náročnost řešení. Ač je o něco složitější sestavit matice pro  $p$ -BEM, všimněme si, že s ohledem na schéma (5.2) a vztah (4.23) nám při naší konkrétní úloze (5.8) pro dimenze jednotlivých soustav platí<sup>19</sup>

$$\begin{aligned} p\text{-BEM} : \dim \mathbb{V} &= 4(p+1) \\ h\text{-BEM} : \dim \mathbb{V} &= \frac{2}{h}, \quad h \leq \frac{1}{2}. \end{aligned}$$



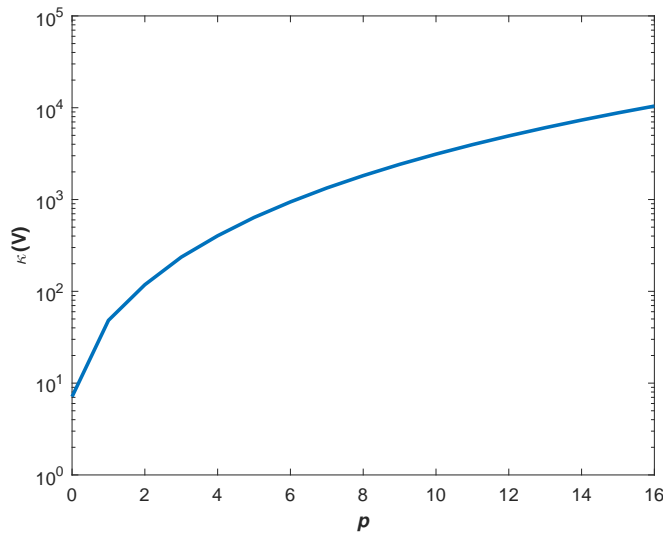
Obrázek 9: Srovnání  $L^2(\Gamma)$  normy chyby  $h$ -BEM a  $p$ -BEM vzhledem k dimenzi produkovaných soustav

Skutečně je zřejmé, že  $p$ -BEM konverguje exponenciálně a jeho chyba je při totožné dimenzi soustav výrazně nižší, než u  $h$ -BEM. Závěrem vyjádřeme jistou seberefexi: Nutno podotknout, že přece jen o něco přesnější obrázek situace bychom dostali v  $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$  normě. Nejjednodušší cestou jak tuto normu získat by však byla přibližná a poměrně pracná cesta - sestavit matice pro vysoké  $p$  a  $h$ , nalezené řešení s menším řádem či počtem segmentů interpolovat, aby souhlasily dimenze, a „nejpřesněji“ sestavenou matici  $\mathbb{V}$  užít ve smyslu (4.16) pro vyčíslení odhadu  $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$  normy. Každopádně i  $L^2(\Gamma)$  norma potvrdila naše očekávání, jak ukazuje Obrázek 9.

<sup>19</sup>Uvádíme dimenzi matice  $\mathbb{V}$ , nicméně při uzavřené geometrii hranice jsou dimenze matic  $\mathbb{K}, \mathbb{M}$  a tedy celkově dimenze řešených soustav totožné.

## 6 Závěr

Ohlédneme-li se za našim počínáním, představili jsme si Gaussovu kvadraturu a její specifickou variantu Gauss-log, ukázali si, jak dojít od okrajové úlohy k hraniční integrální formulaci a jak ji numericky řešit za pomoci BEM. Ukázali jsme si také jednu z možností, jak algoritmicky přistupovat k hraničním prvkům vyšších řádů. Je otázkou, zda není lépe volit jinou strukturu matic. Podívejme se na číslo podmíněnosti matice  $\mathbb{V}$  pro testovací úlohu z poslední kapitoly, v závislosti na rostoucím  $p$ :



Obrázek 10: Číslo podmíněnosti matice  $\mathbb{V}$  pro úlohu o 4 segmentech

Obrázek 10 nám ukazuje závislost čistě na  $p$ , nicméně roli jistě hraje také hodnota  $h$  a samotná úloha, kterou chceme řešit. Jelikož dalším krokem by mohlo být účinné párování  $h$  a  $p$  přístupu, ústící v  $h, p$ -BEM, je studium podmíněnosti vznikajících soustav v závislosti na hodnotách  $h, p$  zajímavým námětem další práce.

Další logickou inovací by bylo metodu rozšířit do 3D. Tento krok bude poměrně technicky náročný především s ohledem na konstrukci báze. Navíc, jelikož fundamentální řešení Laplaceovy rovnice ve 3D má podobu

$$G(x, y) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\|x - y\|},$$

odpadá možnost využít Gauss-log kvadraturu. A odtud pramení jiný nápad pro budoucí práci, zkoumat další možné aplikace Gauss-log kvadratury a jejich vlastností.

Tak či tak, práce nám ukázala, že z hlediska konvergenčních vlastností je pro dostatečně regulární úlohu zvyšování řádu značným vylepšením klasické metody hraničních prvků. Teprve budoucnost ukáže, zda by tento přístup mohl vést k metodě, která v určitých oblastech při efektivní implementaci předčí všechny dosavadní postupy v rámci BEM i FEM.

## Literatura

- [1] BANDARA, K., CIRAK, F., OF, G., STEINBACH, O., AND ZAPLETAL, J. Boundary element based multiresolution shape optimisation in electrostatics. *Journal of Computational Physics* 297 (2015), 584–598.
- [2] BEBENDORF, M. *Hierarchical matrices*. Springer, 2008.
- [3] BOUCHALA, J. Variační metody. <http://mi21.vsb.cz>, 2011.
- [4] COSTABEL, M. Boundary integral operators on lipschitz domains: elementary results. *SIAM journal on Mathematical Analysis* 19, 3 (1988), 613–626.
- [5] DAVIS, P. J., AND RABINOWITZ, P. *Methods of numerical integration*. Courier Corporation, 2007.
- [6] GAUTSCHI, W., AND INGLESE, G. Lower bounds for the condition number of Vandermonde matrices. *Numerische Mathematik* 52, 3 (1987), 241–250.
- [7] HUYBRECHS, D., AND OLVER, S. Highly oscillatory quadrature. *Highly oscillatory problems*, 366 (2009), 25–50.
- [8] KELLEY, C. T. *Iterative methods for optimization*, vol. 18. Siam, 1999.
- [9] KYTHE, P. K., AND SCHÄFERKOTTER, M. R. *Handbook of computational methods for integration*. CRC Press, 2004.
- [10] MCLEAN, W. C. H. *Strongly elliptic systems and boundary integral equations*. Cambridge university press, 2000.
- [11] NATARAJAN, R. Domain decomposition using spectral expansions of Steklov–Poincaré operators. *SIAM Journal on Scientific Computing* 16, 2 (1995), 470–495.
- [12] RJASANOW, S., AND STEINBACH, O. *The fast solution of boundary integral equations*. Springer Science & Business Media, 2007.
- [13] ROBERT, C. P. *Monte Carlo methods*. Wiley Online Library, 2004.
- [14] SAUTER, S. A., AND SCHWAB, C. *Boundary element methods, volume 39 of Springer Series in Computational Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 2011.
- [15] STEINBACH, O. *Numerical approximation methods for elliptic boundary value problems: finite and boundary elements*. Springer Science & Business Media, 2007.

## A Základní kód p-BEM

```
1  function [V,K,M] = pBEM2dLaplace2(nodes,edges,ORD,seg_orders,seg_ordersK)
2  % nodes ..... uzly diskretizace
3  % edges ..... dvojice indexu, spojující prislusne uzly v usecku
4  % ORD ..... rad kvadratury
5  % seg_orders ..... stupne baze na jednotlivych segmentech (0 pro
6  %                  konst), K – pro matici K,M (pocet bubblu)
7
8  load('GaussQuadratureForLineSegments.mat')
9  p = points; w = weights;
10 load('GaussLogQuadrature.mat')
11
12 m = size(edges,2);
13 n = size(nodes,2);
14
15 N = sum(seg_orders+1);
16 M = n+sum(seg_ordersK);
17
18 V = zeros(N,N);
19 K = zeros(N,M);
20 M = K;
21
22 indi = 0;
23
24 for i = 1:m
25     indj = n;
26     indVj = 0;
27     edgei = edges(:,i);
28     nodesi = nodes(:,edgei);
29     xi1 = nodesi(:,1);
30     xi2 = nodesi(:,2);
31     ti = xi2-xi1;
32     Si = norm(ti);
33     p_i = seg_orders(i)+1;
34     DOFsi = indi+(1:p_i)';
35     for j = 1:m
36         edgej = edges(:,j);
37         nodesj = nodes(:,edgej);
38         xj1 = nodesj(:,1);
39         xj2 = nodesj(:,2);
40         tj = xj2-xj1;
41         Sj = norm(tj);
42         pj = seg_orders(j)+1;
43         pjK = seg_ordersK(j);
44         nj = [tj(2);-tj(1)]/Sj;
45         DOFsj = [edgej(1);edgej(2);(indj+(1:pjK))'];
46         DOFsVj = indVj + (1:pj)';
```

```

47 V_loc = zeros(p_i,pj);
48 K_loc = zeros(p_i,pjK+2);
49 M_loc = K_loc;
50
51 X = intersect(edgei,edgej);
52 if length(X) == 1
53     ixi1 = find(edgei==X);
54     ixi2 = find(edgei~=X);
55     ixj2 = find(edgej~=X);
56     DOFsj = [edgei(ixi1);edgej(ixj2);(indj+(1:pjK))'];
57     Xi1 = nodesi(:,ixi1);
58     Xi2 = nodesi(:,ixi2);
59     Xj2 = nodesj(:,ixj2);
60 end
61 W = w{ORD};
62 P = p{ORD};
63 LOGW = weights{ORD};
64 LOGP = points{ORD};
65
66 for k = 1:p_i
67     for l = 1:pj
68         if i == j
69             V_loc(k,l) = intIdSegV(k,l,W,P,LOGW,LOGP,Si);
70         elseif length(X) == 1
71             swiV = 1; swjV = 1;
72             if sum(Xi1 ~= xi1) > 0 && mod(k,2)==0
73                 swiV = -1;
74             end
75             if sum(Xi1 ~= xj1) && mod(l,2)==0
76                 swjV = -1;
77             end
78             V_loc(k,l) = swiV*swjV*intAdjSegV(Xi1,Xi2,Xj2,W,P,LOGW,LOGP,k,l);
79         else
80             V_loc(k,l) = intDisSegV(xi1,xi2,xj1,xj2,W,P,k,l);
81         end
82     end
83
84     for l=1:pjK+2
85         if length(X) == 1
86             swi = 1; swj = 1;
87             if sum(Xi1 ~= xi1) > 0 && mod(k,2)==0
88                 swi = -1;
89             end
90             if sum(Xi1 ~= xj1) > 0 && l > 2 && mod(l,2)==0
91                 swj = -1;
92             end
93             K_loc(k,l) = swi*swj*intAdjSegK(Xi1,Xi2,Xj2,W,P,k,l,nj);
94         elseif i == j

```

```

95         M_loc(k,l) = W*(evalLegPoly(k,2*P-1).*evalBubbles(l,P));
96     else
97         K_loc(k,l) = intDisSegK(xi1,xi2,xj1,xj2,W,P,k,l,nj);
98     end
99 end
100 end
101 V_loc = V_loc*Si*Sj;
102 K_loc = K_loc*Si*Sj;
103 M_loc = M_loc*Si;
104 V(DOFsi,DOFsVj) = V(DOFsi,DOFsVj) + V_loc;
105 K(DOFsi,DOFsj) = K(DOFsi,DOFsj) + K_loc;
106 M(DOFsi,DOFsj) = M(DOFsi,DOFsj) + M_loc;
107 indj = indj + pjK;
108 indVj = indVj + pj;
109 end
110 indi = indi + p_i;
111 end
112
113 V = V / (-2*pi);
114 K = K / (2*pi);

```

Výpis 1: Algoritmus p-BEM pro Laplaceovu rovnici s Dirichletovou OP

Poznamenejme, že pokud jsou vstupní vektory `seg_orders` a `seg_ordersK` nulové, metoda se chová jako klasická  $h$ -BEM.

## B Ostatní přílohy na CD

Algorismus uvedený v příloze A využívá několik pomocných procedur a datových souborů. Pojďme si ve stručnosti sepsat jejich jednotlivé role:

- **GaussQuadratureForLineSegments.mat** - soubor obsahující váhy a body pro Gaussovu-Legendreovu kvadraturu (různého řádu),
- **GaussLogQuadrature.mat** - soubor obsahující váhy a body pro Gauss-log kvadraturu,
- **LegendrePoly(n)** - procedura, generující koeficienty Legendreova polynomu stupně  $n$ ,
- **evalLegPoly(n,x)** - procedura, vyčísľující hodnotu Legendreova polynomu stupně  $n-1$  v hodnotách vektoru  $x$ ,
- **evalBubbles(n,x)** - analogie k předchozí proceduře pro hierarchickou bázi,
- **intIdSegV(k,l,w,p,logw,logp,Si)** - procedura, vyčísľující prvek na souřadnicích  $k, l$  pro diagonální bloky matice  $V$ . Dalšími vstupními argumenty jsou váhy a body Gaussovy-Legendreovy ( $w, p$ ) a Gauss-log ( $\log w, \log p$ ) kvadratury, a délka segmentu  $S_i$ ,
- **intAdjSegV(xi1,xi2,xj2,w,p,logw,logp,k,l)** - totéž pro bloky sousedních segmentů, přijímá místo délky segmentu koncové body segmentů  $xi1, xi2, xj2$ ,
- **intDisSegV(xi1,xi2,xj1,xj2,w,p,k,l)** - totéž pro bloky disjunktních segmentů matice  $V$ ,
- **intAdjSegK(xi1,xi2,xj2,w,p,k,l,nj)** - vyčíslení prvků v blocích sousedních segmentů matice  $K$ , vstupní argumenty analogické k předchozím vyčísľujícím procedurám, navíc přijímá jednotkový vektor vnější normály k  $j$ -tému segmentu  $nj$ ,
- **intDisSegK(xi1,xi2,xj1,xj2,w,p,k,l,nj)** - totéž pro bloky disjunktních segmentů matice  $K$ ,
- **L2projPhi(nodes,edges,pK,g)** - procedura, projektující zadanou funkci  $g$  na bázi  $\varphi$  o řádu  $pK$ , na hranici oblasti, definované maticí vrcholů **nodes** a hran **edges**,
- **discretizePolygon(corners,h)** - procedura, ekvidistantně diskretizující polygon o zadaných vrcholech **corners** na segmenty délky  $h$ ,
- **test\_square\_laplace** - testovací skript, měřící chybu a vykresľující přibližné řešení pro zadaný řád.